
Réduction d'un modèle thermique non linéaire par modes de branche. Application a un câble chauffant.

A. Neveu ¹; K.EL. Khoury ^u.

RESUME.

Les problèmes thermiques *non linéaires* sont fréquents. On rencontre aussi des *conditions limites* qui subissent d'importantes variations le long de la frontière. Comment construire dans ce contexte des modèles réduits utilisables dans ces configurations variées, sans avoir à reprendre tous les calculs ? Une décomposition de la solution sur une *base modale de branche* permet de réduire substantiellement le nombre des états représentatifs du système. Tous les champs sont décomposables sur cette base qui servira à des jeux variés de conditions limites, ou à différentes variations non linéaires des coefficients. Le critère de réduction retenu, puise sa justification dans une analyse spatiale et temporelle de la base. Elle montre que les modes se rangent en trois catégories. Une corrélation apparaît entre ce classement et la *matrice de couplage des modes*. Une définition de la *dominance d'un mode* autorise une dernière réduction. La démarche est illustrée sur l'exemple d'un câble électrique chauffant.

ABSTRACT.

Reduction of a nonlinear thermal model by the branch modes. Application to a heating cable.

Nonlinear thermal problems are numerous. The boundary conditions can have significant variations all over the boundary. The problem consists of developing reduced models that can be used in these various configurations, without having to carry out all the calculations at each time. An expansion of the solution on a branch modal basis can dramatically reduce the number of states representing the system. All the fields are expandable on this basis that will be used for many different boundary conditions, or for various nonlinear variations of the system parameters. The reduction criterion is based upon a spatial and temporal analysis of the basis. It shows that the modes can be separated into three categories. A correlation appears between this classification and the modes coupling matrix. The definition of a mode dominance allows an additional reduction. The approach is illustrated with the example of a heating electric cable.

Nomenclature.

a	diffusivité thermique $a = k / c$	$[s^{-1} m^2]$	x_i	coefficient de décomposition ou état d'excitation.
c, c_0, c_1	capacité calorifique volumique.	$[J m^{-3} K^{-1}]$		
D_j	dominance du mode d'ordre j .	$[J K]$		
h, H	coefficient d'échange superficiel.	$[W m^{-2} K^{-1}]$		
k, k_0, k_1	conductivité thermique.	$[W m^{-1} K^{-1}]$		
J	norme de la réponse du système.	$[J K]$		
M	point du domaine $W U \cdot W$.			
N, N_t	nombre de modes dominants, couplés-lents.			
N_0	nombre de nœuds du maillage.			
u	normale extérieure à la frontière.			
T	champ de température.	$[K]$		
t, Dt	temps . Pas de temps.	$[s]$		
V_n	fonction propre de branche d'ordre n .			

¹ Université d'Evry CEMIF/GMFE.

alain.neveu@wanadoo.fr

^u Université Libanaise Beyrouth.

keknam@inco.com.lb

Alphabet Grec:

$a_{n,m}$	racines de l'équation transcendante.
ε	émissivité.
κ_{ij}	coefficients du modèle d'état non linéaire.
δ_{ij}	symbole de Kronecker.
γ_{ij}	coefficient de couplage entre les modes i et j .
λ_i	valeur propre de branche d'ordre i . [s^{-1}]
m_i	contribution du terme surfacique à la norme.
τ_n	temps caractéristique d'ordre n . [s]

ϖ	Puissance volumique.	[W m ⁻³]
ζ	coefficient de modération.	[J m ⁻² K ⁻¹]
ξ_i, φ_i	fonctions de couplage du modèle d'état.	
w	orientation du câble dans l'écoulement.	
W	domaine géométrique de frontière • W .	

Symboles:

\equiv	égal par définition
----------	---------------------

1. LES MOTIVATIONS DE LA REDUCTION DE MODELE EN THERMIQUE.

La technique de réduction sur base de branche que nous présentons est générale. Toutefois, pour l'expliquer, nous allons nous appuyer sur un exemple. Nous considérons un câble chauffant constitué de deux résistances en aluminium, enrobées dans de la magnésie (*figure 1*). L'ensemble est protégé par une gaine en acier inoxydable. Le câble circulaire est placé dans un écoulement d'air perpendiculaire à son axe. La température de l'environnement et l'intensité du courant électrique peuvent varier. Ce sont les sollicitations du système. On étudie la mise en température du câble. C'est un problème de conduction thermique typique. En particulier il est instationnaire et le domaine est composite.

Les caractéristiques physiques des matériaux ne sont pas constantes si la plage de variation de la température est grande. C'est le cas de la conductivité ou de la capacité thermique volumique. La résistance électrique elle aussi varie. Les coefficients de l'équation de la chaleur et le dégagement de puissance par effet Joule sont donc non linéaires. Intéressons nous à la condition limite. Ici il s'agit de convection forcée, couplée à du rayonnement. Ce mode d'échange fait intervenir la puissance quatrième de la température. C'est donc une cause importante de non-linéarité. On peut considérer en revanche que la convection est linéaire. Cependant le coefficient de convection varie fortement d'un point à l'autre de la surface (angle θ). Ceci est lié au sillage induit par le câble lui-même.

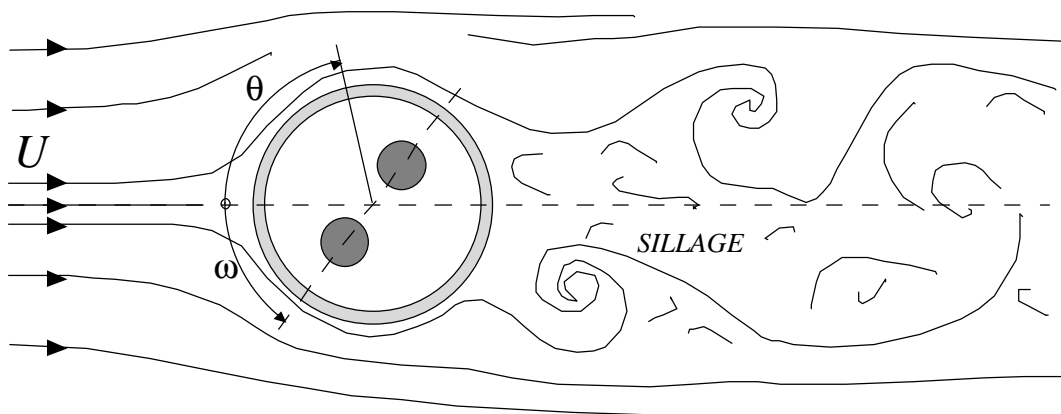


Figure 1.
Câble cylindrique placé dans un écoulement turbulent forcé.

La résolution d'un tel problème ne peut-être que numérique. On construit en général un modèle discrétisé en espace sur un maillage. Chaque nœud est un état du système. On obtient des systèmes matriciels de grande taille, difficiles à résoudre en raison des non-linéarités. De plus ils ne permettent pas l'analyse en dehors des simulations. Il n'existe pas de hiérarchie bien établie entre les états du système. On envisage alors de réduire la taille du modèle. Il faut trouver un nombre limité d'états, mais représentatifs. On cherche un modèle dont les éléments permettent de comprendre le comportement général du système sans nécessairement faire des simulations. Les applications sont multiples. On utilise des modèles réduits pour des simulations répétitives avec des sollicitations très variées [Deq.97]. La régulation, ou l'optimisation d'une commande tirent profit d'un modèle réduit. Des techniques de métrologie indirecte réalisent des mesures par des techniques inverses, dont les performances sont améliorées par la réduction [Pet.96, Bat.98]. L'identification de paramètres physiques et le contrôle non destructif rentrent aussi dans les champs d'application assez vastes des modèles réduits.

Les techniques de réduction par décomposition modale, employées jusqu'à présent en thermique, envisagent des modèles linéaires [Sau.83, Mic.84, Bac.84, Nei.89, Pet.91, Oule.93, Lem.94]. Le système est maillé, puis les équations du bilan énergétique sont discrétisées. Cette discrétisation contient aussi les conditions limites, qui de ce fait se retrouvent irréversiblement dans le modèle. On aura, par exemple, une

condition de Fourier sur une partie de la frontière, avec un coefficient d'échange fixe, le reste étant adiabatique. Une fois le modèle discrétisé, une approximation des modes propres du système est recherchée par diagonalisation. C'est l'étape la plus longue du processus. Dans la base trouvée, tous les modes n'ont pas la même importance. On peut dégager une dominance de certains modes, qui formeront le noyau d'une base réduite. La base réduite est dépendante des conditions limites.

Le champ de température est obtenu par projection sur la base réduite. Les coefficients de décomposition, appelés aussi états des modes, vérifient un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre en temps. Chaque état est découplé, d'où des possibilités de réduction efficaces et sûres. L'équation d'état dépend des sollicitations. De ce fait, jusqu'à présent, les techniques de décomposition modales envisagées en thermique font intervenir les conditions limites à la fois dans la base propre et dans les états.

Comment, dans cette situation, générer des modèles réduits utilisables dans des configurations variées, sans avoir à reprendre tous les calculs ? Si on modifie l'orientation du câble dans l'écoulement par rotation autour de son axe (angle ω), alors la condition limite change en chaque point de la frontière, bien que le sillage et la forme du câble restent les mêmes. Peut-on adapter les techniques de réduction aux cas de transferts thermiques non linéaires ? On est dans cette configuration avec le rayonnement du câble vers l'enceinte environnante. Lorsque les écarts de températures sont très grands, par exemple lors de la trempe des métaux, on ne peut plus considérer la conductivité et la capacité thermique comme des constantes.

On peut envisager des méthodes comme la ré-analyse modale, l'analyse des perturbations, et dans une moindre mesure la synthèse modale [Fla.93]. En thermique, elles ne sont développées que pour des problèmes linéaires. C'est de ce constat qu'est née l'idée d'utiliser des modes propres de branche. Ils forment une base de solutions pour tous les champs thermiques dans le domaine et sa frontière. Ces modes sont indépendants des conditions limites. Toutes les spécificités du modèle sont concentrées dans les états de décomposition du champ sur la base. En contrepartie, les états sont couplés et leurs évolutions ne sont plus linéaires, ce qui compliquera le processus de réduction. Nous allons à présent donner une description des équations physiques du problème thermique. Nous introduirons ensuite la base de branche et ses propriétés. Une analyse qualitative nous permettra de classer les modes de branche en catégories et de comprendre comment peut s'opérer le choix des modes dominants. Nous verrons au passage les problèmes liés à l'approximation numérique de la base. Nous testerons enfin un algorithme de réduction « automatique ».

2. CONSTRUCTION DU MODÈLE DE BRANCHE.

2.1. PROBLÈME PHYSIQUE.

On envisage ici un ouvert Ω de \mathbb{R}^n délimité par une frontière fixe indéformable $\bullet\Omega$. M désigne un point de Ω . Le domaine est composite. Les contacts thermiques sont parfaits. Le câble comporte quatre sous domaines : les deux résistances, l'enrobage et la gaine. Il est le siège d'un transfert de chaleur par conduction. La conductivité thermique k et la capacité thermique volumique c sont des fonctions de l'espace et de la température T . Le terme source est noté ϖ . C'est le dégagement de puissance par effet Joule des résistances électriques. Sur la frontière, le système échange de l'énergie par convection et rayonnement. La relation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\forall M \in \Omega \quad \nabla \cdot [k_{(M,T)} \cdot \nabla T_{(M,t)}] + \varpi_{(M,T,t)} = c_{(M,T)} \frac{\partial T_{(M,t)}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\forall M \in \bullet\Omega \quad k_{(M,T)} \cdot \nabla T_{(M,t)} \cdot \underline{n} + H_{(M)} [T^r_{(M,t)} - T^r_{ex}(M,t)] = 0 \quad (2)$$

La condition limite est non linéaire et non uniforme. La notation est schématique, mais elle renferme toutes les difficultés que nous souhaitons aborder. Dans le cas du câble nous prendrons en compte simultanément du rayonnement et de la convection. Nous opérerons dans (2) la substitution :

$$H(M) \left[T^r(M,t) - T_{ex}^r(M,t) \right] \leftrightarrow h(q) \left[T(M,t) - T_{cv}(t) \right] + eS \left[T^4(M,t) - T_{ry}^4(t) \right] \quad (3)$$

La surface grise du câble émet vers une enceinte à température T_{ry} . Pour la convection dans un sillage turbulent on a une loi linéaire mais non-uniforme suivant θ (figure 2). La température du fluide en amont est notée T_{cv} . Les températures de l'enceinte et du fluide ainsi que la puissance dégagée par effet Joule sont les sollicitations du système. La conductivité et la capacité thermique sont des fonctions de la température. Nous supposons qu'elles varient autour de valeurs moyennes, pouvant servir à linéariser le problème. Nous poserons :

$$k(M,T) = k_o(M) + k_1(M,T) \quad c(M,T) = c_o(M) + c_1(M,T) \quad (4)$$

Les valeurs k_o et c_o seront utilisées pour construire la base de branche.

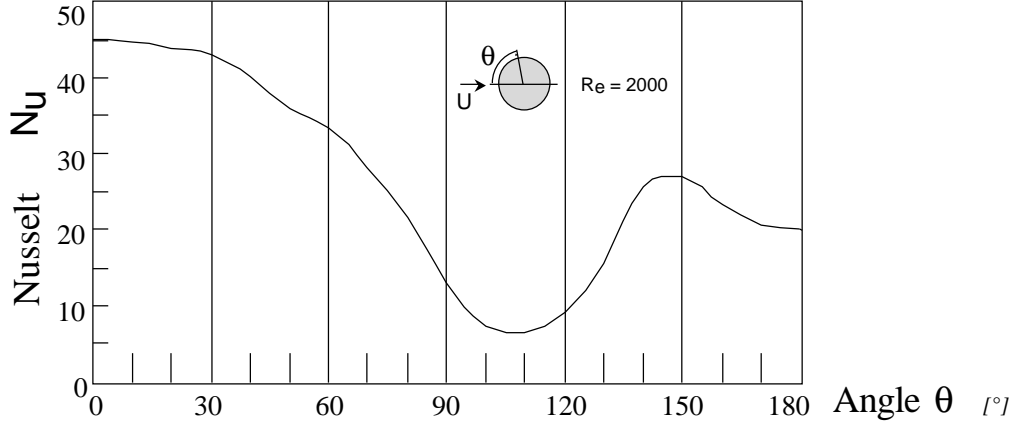


Figure 2

Variation du nombre de Nusselt autour d'un cylindre placé dans un écoulement turbulent forcé.

$$Re = \frac{U f}{\nu_f} = 2000 \quad Nu(q) = \frac{h(q) f}{l_f} \quad \text{d'après [Bai.97]}$$

2.2. PROBLÈME DE BRANCHE ET REPRÉSENTATION D'ÉTAT.

Nous définissons à présent le problème de branche. Nous l'écrivons à partir des valeurs moyennes des fonctions thermophysiques :

$$\forall M \in \Omega \quad \nabla \cdot [k_o(M) \cdot \nabla V_i(M)] \equiv \lambda_i c_o(M) V_i(M) \quad (5)$$

$$\forall M \in \mathbb{1}\Omega \quad k_o(M) \cdot \nabla V_i(M) \cdot \underline{n} + z \lambda_i V_i(M) \equiv 0 \quad (6)$$

Un *élément propre* d'ordre i est représenté par son *mode propre* $V_i(M)$ associé à la *valeur propre* λ_i . Il vérifie l'équation (5) ainsi que la *condition limite de Steklov* (6). Cette dernière distingue le problème de branche des problèmes aux valeurs propres classiques. En effet λ_i apparaît explicitement dans (6), contrairement au cas des conditions limites homogènes de type Dirichlet, Neumann ou Fourier. Notons que pour la même raison, la valeur zéro est une solution non triviale du problème de branche. Le mode associé est uniforme. On parle de mode statique et on lui donne l'indice 0. Dans la condition de Steklov figure le paramètre z . Sa présence permet de respecter l'homogénéité dimensionnelle des équations. Un choix convenable de sa valeur permet à (6) de ne pas dégénérer numériquement en une condition de Neumann ou de Dirichlet. Ce choix est discuté dans [Nev.99]. Dans le cas du câble, on prendra $z = c_o^{\text{inox}} f / 2$, où f est le diamètre extérieur du câble.

Les solutions du problème de branche possèdent de nombreuses propriétés. L'opérateur étant auto-adjoint, les éléments propres sont à valeurs réelles. Les modes propres forment une base pour toutes les fonctions définies sur $\bar{\Omega}$ et de carré sommable. Tous les champs de température solutions de (1-2) seront décomposables sur cette base, et nous écrivons, en notant x_i les états d'excitation des modes :

$$\forall M \in \overline{\Omega} \quad T_{(M,t)} = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(t) V_j(M) \quad (7)$$

Les modes propres forment une famille orthogonale, et l'on a la relation :

$$\forall i, j \ / i \neq j \quad \langle V_i | V_j \rangle \equiv \int_{\Omega} c_o(M) V_j(M) V_j(M) dv + Z \int_{\Gamma\Omega} V_j(M) V_j(M) ds = 0 \quad (8)$$

À partir de (8), qui définit un produit scalaire, on peut normer les modes, pour avoir :

$$\|V_i\|^2 \equiv \langle V_i | V_i \rangle = 1 \quad (9)$$

Les valeurs propres sont négatives. En thermique, l'équation de la chaleur fait intervenir la dérivée première par rapport au temps. Nous utiliserons donc de préférence l'inverse de λ_i noté τ_i . C'est la *constante de temps* du mode. Elle donne un premier renseignement sur la dynamique du mode propre.

L'équation d'états est obtenue par projection. On remplace la température par sa décomposition (7) dans les équations (1) et (2). Après multiplication de (1) par le mode V_i , on intègre sur le domaine Ω . On injecte alors la condition limite pour obtenir une formulation faible. Enfin l'orthogonalité des modes de branche autorise certaines simplifications. Après calcul, on trouve le système différentiel du premier ordre par rapport au temps :

$$\forall i \quad \dot{x}_i(t) - \sum_j k_{ij}^1 x_j(t) + j_i(x_{j,t}) + x_i(t) \equiv \sum_j (g_{ij} + g_{ij}^1) \dot{x}_j(t) \quad (10)$$

Où nous avons posé :

$$\begin{aligned} k_{ij} &\equiv \int_{\Omega} \nabla V_i(M) \cdot k_o(M) \cdot \nabla V_j(M) dv = -d_{ij} \ / i \\ k_{ij}^1 &\equiv \int_{\Omega} \nabla V_i(M) \cdot k_1(M,T) \cdot \nabla V_j(M) dv \\ g_{ij} &\equiv \int_{\Omega} c_o(M) V_i(M) V_j(M) dv = d_{ij} - Z \int_{\Gamma\Omega} V_i(M) V_j(M) ds \\ g_{ij}^1 &\equiv \int_{\Omega} c_1(M,T) V_i(M) V_j(M) dv \\ j_i(x_{j,t}) &\equiv - \int_{\Gamma\Omega} H(M) V_i(M) \left[\sum_j x_j(t) V_j(M) \right]^r ds \\ x_i(t) &\equiv \int_{\Omega} v(M,t) V_i(M) dv + \int_{\Gamma\Omega} H(M) V_i(M) [T_{ex}(t)] ds \end{aligned} \quad (11)$$

Les états sont liés et le système n'est pas linéaire. Les coefficients de couplage k^1 et g^1 sont associés aux non-linéarités de la conductivité et de la capacité thermique. La condition limite induit aussi un couplage à travers j . Il existera toujours, même si la condition limite est linéaire. En effet, les modes vérifient une condition de Steklov au lieu de la condition de Fourier satisfaite par la température. On remarque enfin que les dynamiques des états sont couplées par l'intermédiaire des coefficients g_{ij} . Là encore ce phénomène est lié à la condition de Steklov. Notons que l'orthogonalité des modes permet de simplifier l'évaluation des g_{ij} . De plus contrairement aux autres termes, ces coefficients sont intrinsèques au modèle. C'est pour cette raison que la *matrice de couplage* formée par les coefficients g_{ij} sera un instrument de choix pour évaluer simplement les interactions entre les éléments propres de branche.

3. ANALYSE DE LA BASE DE BRANCHE.

3.1. LOCALISATION SPATIALE DES MODES DE BRANCHE.

L'expression du produit scalaire (8) comporte des termes volumique et surfacique. Nous les retrouvons dans (9), où leur somme est égale au carré de la norme. Introduisons le rapport m_i :

$$m_i \equiv \frac{\int_{\Omega} V_i^2(M) ds}{\|V_i\|^2} \quad 0 < m_i < 1 \quad (12)$$

Le mode d'ordre $i=0$ est associé à une valeur propre nulle. Il est constant dans le domaine et nous le qualifierons de *mode global*. Son rapport m_0 va nous servir de référence pour un classement spatial simple. Lorsque m_i est de l'ordre de grandeur de m_0 le mode est considéré comme global. Son amplitude n'est faible ni sur la surface, ni dans le volume. Si m_i tend vers un, on dira que le mode est *surfacique*, et si $m_i \ll m_0$ on dira qu'il est *volumique*. Un mode surfacique est caractérisé par une amplitude pratiquement nulle dans le domaine Ω . Il ne prend des amplitudes notables que très près et sur la frontière. C'est exactement l'inverse pour un mode volumique. Bien entendu il peut exister d'autres formes de modes qui ne rentrent pas dans cette classification basée sur le rapport m_i . Un mode peut-être localisé dans un sous-domaine interne dont les propriétés sont très différentes de celles du milieu qui l'entoure. La *figure 3* montre pour le câble chauffant l'image de quatre modes, chacun étant représentatif de l'une des catégories. On constate bien des morphologies nettement différenciées.

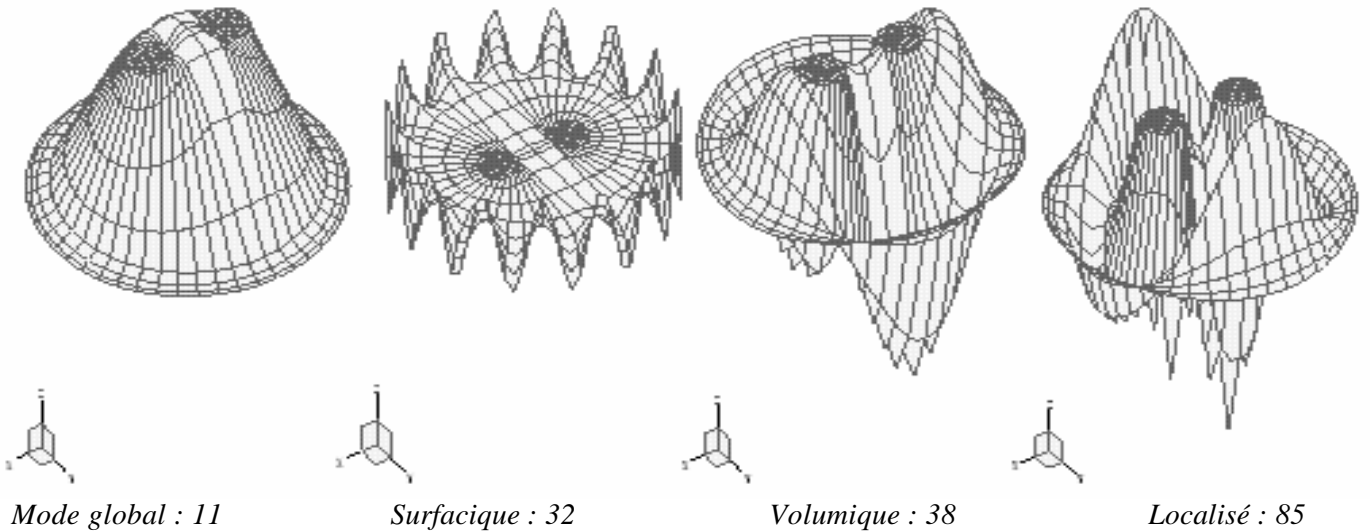


Figure 3
Modes de branche types du câble chauffant calculés par éléments finis quadratiques (1100 nœuds).

3.2. IMBRICATION DES TYPES DE MODES DANS L'ÉCHELLE TEMPORELLE.

Nous classons les éléments propres dans l'ordre décroissant des constantes de temps. Ce choix initial est motivé par deux raisons. D'une part, la technique de réduction élémentaire d'un modèle modal consiste à tronquer la base en dessous d'un temps de coupure. D'autre part les algorithmes numériques de calcul des éléments propres à partir de la matrice aux éléments finis fournissent leurs résultats dans cet ordre. Le *tableau I* donne les 90 plus grandes constantes de temps du modèle du câble. Les modes associés à des valeurs propres numériquement doubles sont groupés.

ordre i	τ_i [s]	μ_i	n	ordre i	τ_i [s]	μ_i	n	ordre i	τ_i [s]	μ_i	n
0	infinie	0,759	glob	27	30,69	0,044	glob	58	12,66	0,024	vol
1	1027,90	0,828	glob	28 & 29	28,59	0,962	13	59 & 60	12,58	0,982	26
2	1021,10	0,827	glob	30 & 31	26,27	0,965	14	61 & 62	11,98	0,983	27

3	397,34	0,854	glob	32 & 33	24,30	0,968	15	63 & 64	11,40	0,983	28
4	396,75	0,855	glob	34 & 35	22,60	0,970	16	65 & 66	10,85	0,984	29
5	216,40	0,874	glob	36 & 37	21,12	0,972	17	67	10,69	0,027	vol
6	216,38	0,874	glob	38	20,09	0,029	vol	68 & 69	10,33	0,984	30
7	139,81	0,891	glob	39 & 40	19,80	0,974	18	70	9,85	0,020	vol
8	139,80	0,891	glob	41 & 42	18,62	0,975	19	71 & 72	9,85	0,985	31
9 & 10	100,19	0,905	5	43	18,00	0,032	glob	73 & 74	9,39	0,985	32
11	84,89	0,098	glob	44 & 45	17,56	0,976	20	75	9,37	0,017	vol
12 & 13	76,94	0,917	6	46 & 47	16,60	0,977	21	76	9,33	0,018	vol
14 & 15	62,05	0,928	7	48 & 49	15,73	0,978	22	77 & 78	8,95	0,986	33
16 & 17	51,86	0,936	8	50 & 51	14,96	0,979	23	79 & 80	8,54	0,986	34
18 & 19	44,53	0,944	9	52	14,53	0,979	24	81 & 82	8,15	0,987	35
20 & 21	39,04	0,950	10	53	13,96	0,031	glob	83 & 84	7,79	0,987	36
22	34,86	0,041	glob	54	13,57	0,982	24	85	7,73	0,018	loc
23 & 24	34,77	0,955	11	55 & 56	13,19	0,982	25	86 & 87	7,45	0,988	37
25 & 26	31,37	0,959	12	57	13,02	0,021	vol	88	7,17	0,013	vol

Tableau I

Constantes de temps du câble t_i par ordre décroissant. La localisation des modes de branche est déterminée par m_i . On a indiqué la valeur numérique de n pour les modes surfaciques. Les modes globaux et volumiques sont repérés par « glob » et « vol » respectivement.

Première constatation, la décroissance des constantes de temps est rapide. C'est une caractéristique des bases modales en thermique. Elle constitue le critère le plus élémentaire pour la réduction.

Lorsqu'un mode est surfacique, on a indiqué le nombre d'inversion de sa trace sur la frontière du domaine, notée n (il s'annule $2n$ fois). Ce nombre d'inversions est utile pour montrer que les modes surfaciques sont indépendants de la nature du domaine interne. On peut se rendre compte de cette propriété en utilisant deux géométries plus simples. L'une correspond à un cylindre homogène en acier inoxydable et l'autre à un cylindre de magnésie entouré par une gaine en acier inoxydable. Ici des solutions analytiques existent (annexe 1). On retrouve encore des modes surfaciques. Leurs traces sont sinusoïdales et s'annulent $2n$ fois, la valeur de l'indice n étant liée à l'ordre du mode. Chaque mode a un ordre de multiplicité 2. Un mode et son double ne diffèrent que par une rotation de $\pi/2n$. On peut alors comparer les constantes de temps des trois modèles en fonction de n (figure 4). À partir de $n=15$ les modes surfaciques sont identiques, preuve que la nature exacte du cœur du domaine ne les influence pas. On peut montrer rigoureusement que les formes spatiales des modes du cylindre bi-matériaux convergent vers ceux du cylindre homogène. On vérifie le même résultat « visuellement » avec le câble. En particulier la rotation de $\pi/2n$ entre modes doubles est bien retrouvée. Notons qu'au-delà de $n=32$ les modes surfaciques du câble s'écartent du modèle analytique. Mais ceci est lié à leur mode de calcul et nous y reviendrons plus loin.

Le calcul analytique montre que la décroissance des constantes de temps des modes surfaciques est linéaire en n . Au contraire la décroissance est beaucoup plus rapide pour les modes globaux et volumiques. Le tableau I montre bien l'imbrication des types de modes dans l'échelle temporelle. Tirons un dernier enseignement de cette analyse. À mesure que la constante de temps diminue, un mode n'a plus que deux alternatives pour respecter la condition de Steklov sur la frontière. Il peut garder une amplitude non nulle, qui reste finie. Ceci impose que le gradient devienne très grand. L'amplitude va donc décroître très vite dès que l'on s'éloigne du bord. Ceci est caractéristique d'un mode surfacique. L'autre possibilité consiste pour le mode à pratiquement s'annuler sur la frontière. Bien entendu le gradient lui restera non nul et fini sur cette même frontière. Ce type de mode, que nous avons qualifié de volumique, va converger vers le mode d'un problème de Dirichlet. On le démontre pour les solutions analytiques. On le vérifie dans le cas du câble. On peut conclure que les modes surfaciques et les modes volumiques sont nécessairement associés à des dynamiques rapides.

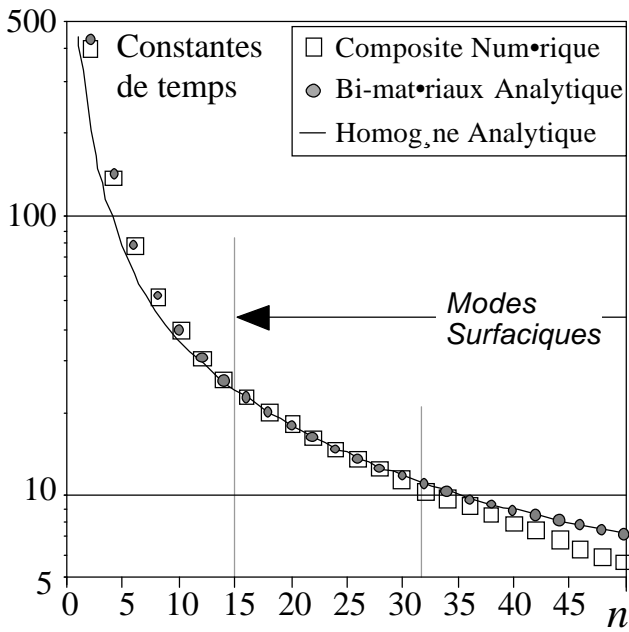


Figure 4.
Constantes de temps des modes surfiques de trois cylindres de constitutions différentes.

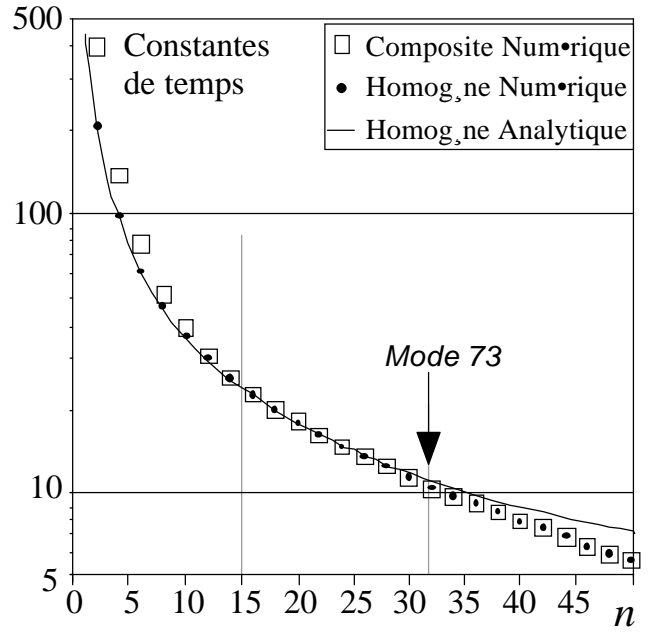


Figure 5.
Constantes de temps des modes surfiques. Qualité de l'approximation par éléments finis.

3.3 QUALITÉ DE L'APPROXIMATION DE LA BASE PAR ÉLÉMENTS FINIS.

Nous avons montré que la trace d'un mode surfacique change de signe $2n$ fois sur la frontière. De plus ce mode est double. Si on a placé N_s nœuds sur cette frontière avec des éléments quadratiques, on ne peut espérer reconstituer correctement la forme des modes surfaciques tels que $n > N_s/3$. Pour le maillage du câble, cette limite doit donc se situer vers $n_{\max}=32$. Sur la *figure 5* nous avons reporté les constantes de temps des modes surfaciques du cylindre homogène pour une détermination analytique et par éléments finis. On vérifie bien qu'au-delà de $n=30$ les problèmes numériques apparaissent. Ceci correspond au mode d'ordre $i_{\text{limite}}=68$. On remarque aussi que les approximations par éléments finis pour le cylindre homogène et le câble donnent exactement le même seuil d'imprécision, avec des maillages identiques. Ceci confirme d'une part que l'écart déjà constaté sur la *figure 4* est bien dû à la discrétisation, et d'autre part que la constitution du cœur du domaine n'intervient de toutes façons pas pour les modes surfaciques. Bien entendu on peut imaginer augmenter la densité du maillage sur la frontière. Mais cette solution se heurte à deux objections. D'une part, ceci augmente aussi le nombre de nœuds à l'intérieur du volume. Mais surtout on est vite limité car la décroissance des constantes de temps surfaciques est linéaire en n . On rencontre donc beaucoup de modes surfaciques même pour des ordres i petits. Les efforts pour « capter » les modes surfaciques d'ordres élevés risquent d'être vains.

On peut se demander alors si la détermination précise des modes surfaciques est nécessaire. N'oublions pas que nous recherchons un modèle réduit. Nous verrons que les modes surfaciques sont découplés. Ainsi l'élimination d'un de ceux-ci n'entache pas la dynamique des autres modes. Comme de plus ces modes sont peu dominants, la réponse globale sera faiblement perturbée par cette élimination. Une question demeure néanmoins en suspens. Les modes volumiques, dont les constantes de temps sont inférieures à celle du premier mode surfacique mal reconstitué, seront-ils eux aussi entachés d'erreur ? La question mérite d'être posée car nous verrons que ces modes sont couplés et peuvent être dominants. Par conséquent le modèle réduit les utilisera. Nous n'avons pas de réponse définitive. Nous avons comparé les éléments propres analytiques et numériques du cylindre homogène. L'accord entre ces deux calculs, pour les modes globaux et volumiques, est excellent pour des ordres situés bien au-delà de i_{limite} . La concordance est bonne pour les temps caractéristiques, mais aussi pour la forme des modes. On peut tenter un début d'explication. Comme les modes volumiques sont pratiquement nuls sur la frontière, la finesse du maillage surfacique intervient très peu dans le calcul. Ici la précision est limitée par la finesse du maillage interne. Mais ce dernier comporte un bien plus grand nombre de nœuds, et les modes volumiques « utiles » sont bien retrouvés.

4. PERFORMANCES DU MODÈLE RÉDUIT.

4.1 CRITÈRES DE RÉDUCTION.

Nous proposons un processus de réduction qui réalise une partition de l'espace des modes en deux. Un espace des modes dominants et un espace des modes mineurs. Cette partition s'effectue en deux étapes. Au départ la base comporte autant de modes que de nœuds soit N_o .

Nous allons dans un premier temps estimer le couplage entre les modes. L'évaluation est basée sur l'observation de la matrice symétrique g_{ij} . Elle ne représente que partiellement les couplages, bien entendu, mais elle a le mérite d'être simple à évaluer. L'analyse de la base modale menée au §3 permet de prévoir un découplage total des modes surfaciques entre eux. Ces mêmes modes sont peu couplés aux modes volumiques dont la trace est pratiquement nulle sur $\bullet\Omega$. L'étude analytique montre qu'un mode est nécessairement découplé de son double. Par contre certains modes volumiques ayant des traces identiques peuvent être fortement couplés, et ceci indépendamment de la valeur de leurs constantes de temps. La *figure 6* donne une vue symbolique partielle de g pour le câble. On vérifie bien que de nombreux modes sont découplés. Quantitativement on dira que deux modes sont découplés si :

$$\forall j \in [0, N_o] \quad g_{ij} < (g_{ii} + g_{jj})/10 \quad (13)$$

Le *premier critère* consiste à éliminer les modes qui sont à la fois *découplés et rapides*. Un mode sera jugé rapide si sa constantes de temps est inférieure à un temps de coupure τ_c . Cette valeur dépend du problème étudié. On ne s'intéresse pas aux évolutions très rapides, sauf dans des cas bien particuliers que nous excluons ici (impulsion laser par exemple). Nous choisissons $\tau_c = Dt/10$, où Dt est le pas de temps de la simulation. Pour des systèmes différentiels du premier ordre du type (10), et si le mode est découplé des autres, les réponses impulsionnelles aux sollicitations sont des exponentielles décroissantes du temps $\exp(-t/\tau_i)$. Il est alors inutile de conserver des modes dont les constantes de temps sont inférieures à $Dt/10$. Ce critère n'est plus valable pour un mode rapide mais couplé. Nous souhaitons étudier les évolutions temporelles du câble avec un pas de temps de 60s. Au-delà de l'ordre 101 les modes on des constantes de temps inférieures à 6s. Toutefois certains modes rapides volumiques sont couplés au sens de (13). Il y en a 15, le dernier étant d'ordre 161. Dans le cas du câble, le premier critère permet donc de passer d'une base complète comportant $N_o = 1429$ modes à une première base réduite ne comptant plus que $N_\tau = 116$ modes *couplés ou lents*.

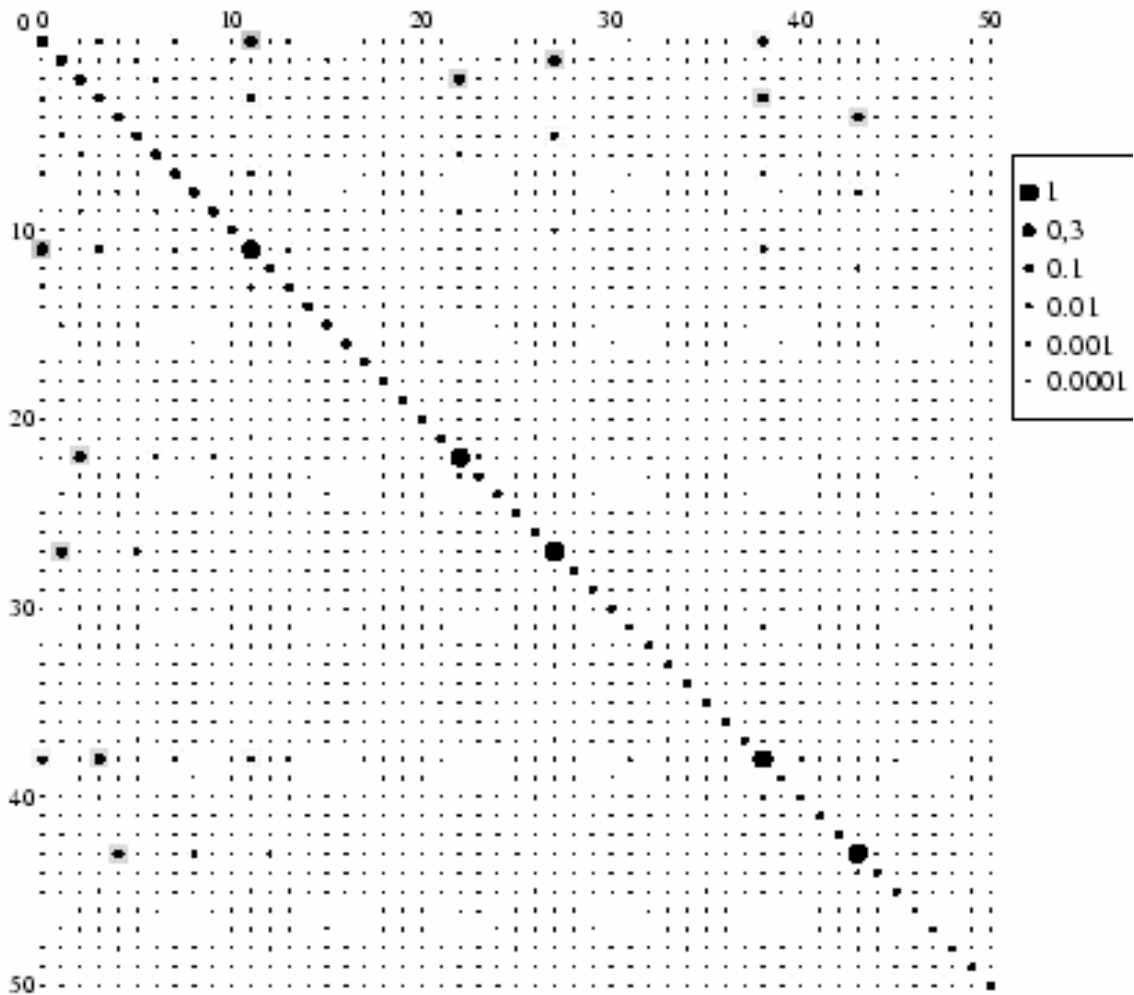


Figure 6.

Matrice symétrique des coefficients $|g_{ij}|$. Chaque petit cercle est lié à la valeur du coefficient $|g_{ij}|$.

Le second critère repose sur l'évaluation de la contribution des modes couplés-lents à la réponse du système lorsqu'il est excité par des sollicitations simples (impulsion, relaxation, créneaux). Cette réponse est une fonction du temps et de l'espace. Il faut rendre compte de ce double aspect à l'aide d'un indicateur

simple. Il doit être représentatif des évolutions de la température à la fois en surface et dans le domaine. Nous caractérisons donc la réponse par une norme, notée J et définie par :

$$J \equiv \int_0^{\infty} \left(\int_{\Omega} c(M) \Delta T^2(M,t) dM + z \int_{\Omega} \Delta T^2(M,t) dM \right) dt \quad (13)$$

Son expression dans la base modale est simple, du fait de l'orthogonalité des modes de branche :

$$J = \sum_{j=1}^N \int_0^{\infty} x_j^2(t) dt \equiv \sum_{j=1}^N D_j \quad (14)$$

Nous appellerons D_j la *dominance du mode* de branche d'ordre j . Les automaticiens parlent d'énergie de l'état, mais ce terme peut prêter à confusion dans le domaine de la thermique car D_j ne se mesure pas en Joules. Les dominances des modes découplés-rapides sont faibles du fait de la décroissance exponentielle des états associés. Le calcul explicite de la dominance des autres modes passe par la résolution numérique de (10), mais limitée au sous-système des N_r modes couplés ou lents. On a donc une durée de simulation modérée. La *figure 7* montre les dominances des modes du câble. On garde les N modes les plus dominants de manière à ce que leur somme représente plus de 99,5 % de J. Appliqué au câble, ce deuxième critère ne conserve plus que 9 modes. Nous aboutissons à un modèle où $N \ll N_o$, le rapport de réduction dépassant 150. Nous verrons que ceci procure des gains substantiels de temps de calcul lors des simulations.

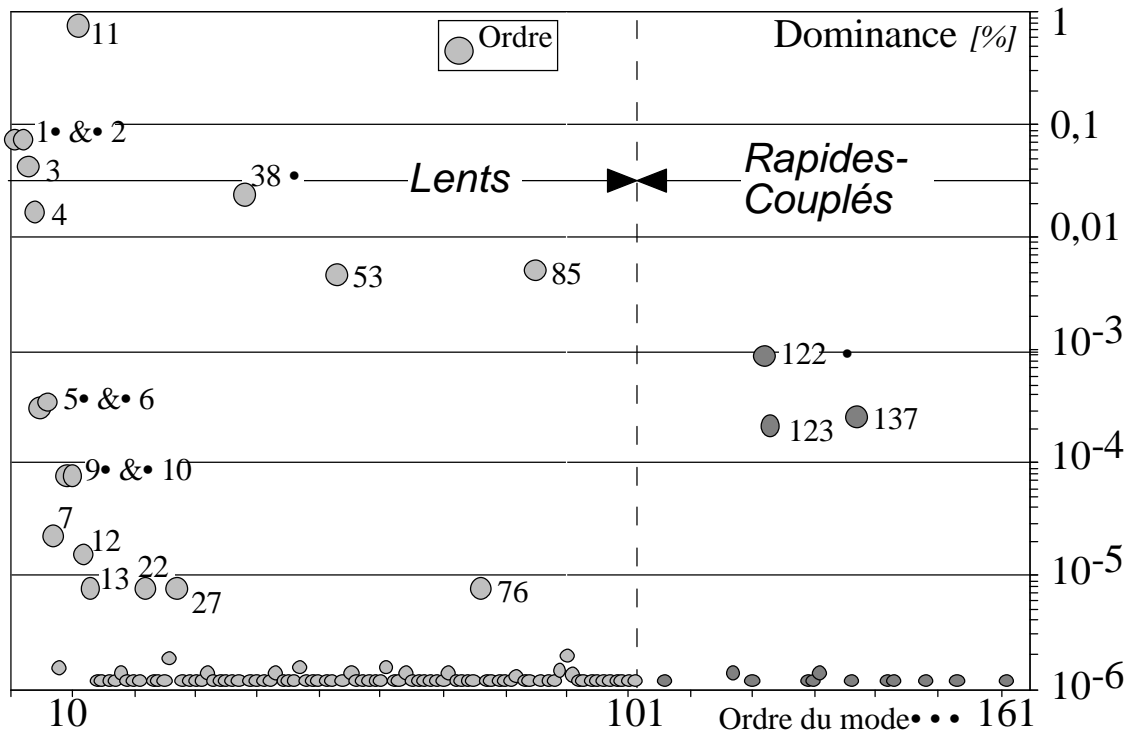


Figure 7
Dominance des modes de branche couplés-lents du câble.

Tous les modes éliminés dans ce processus sont considérés comme mineurs. Bien entendu il est possible de réintégrer une partie de leur influence en corrigeant les modes dominants. On peut par exemple appliquer un amalgame modal [Oul.93]. Chaque mode mineur est affecté à un mode dominant pour former des sous-espaces d'amalgame. Le mode dominant (ou *maître*) impose sa dynamique à ses modes mineurs

(ou *esclaves*). Cette technique, encore en développement pour les modes de branche, n'est pas envisagée ici [Cha.98]. Notons que le processus de réduction peut être automatisé.

Du point de vue des temps de calcul, la détermination de la base de branche demande 5400s. C'est l'étape la plus longue du processus de réduction. La simulation non linéaire pour évaluer les dominances dure 167s. Les autres temps de calcul pour les différentes sélections sont marginaux. Précisons que nous avons envisagé ici le cas de la convection avec sillage couplée à du rayonnement pour un angle $w=0^\circ$. La conductivité et la capacité thermique sont supposées indépendante de T .

4.2 TEST DE LA PERFORMANCE DU MODELE REDUIT LORS DE SIMULATIONS.

Le modèle réduit du câble, construit en suivant la procédure décrite précédemment, comporte les modes $\{0, 1, 2, 3, 4, 11, 38, 53, 85\}$. Il n'aura pas échappé au lecteur attentif que la démarche n'est que partiellement justifiée. En particulier elle ne propose pas une évaluation a priori de l'erreur de réduction. Elle ne prétend pas non plus être optimale. Le choix des seuils, bien que logique peut paraître arbitraire. La justification globale repose en fait sur l'évaluation de la précision du modèle réduit ainsi construit, lorsqu'il est utilisé dans des conditions variées. Nous allons donc pour terminer, comparer les résultats obtenus lors de simulations avec le modèle complet (éléments finis) et le modèle réduit sur la base modale de branche.

On étudie une montée en température du câble initialement à température uniforme. On observe l'évolution de quatre points représentatifs situés en A, B, C et D (voir *figure A1*). Trois configurations sont traitées : (a) convection avec sillage pour $w=0^\circ$, (b) rayonnement dans le vide, et (c) convection couplée à du rayonnement avec $w=45^\circ$. Nous examinerons l'écart entre les températures fournies par le modèle réduit et le modèle de référence. Cet écart sera normalisé par la variation totale de la température pendant la simulation, qui est ici d'une durée de trois heures. Les *figures 8 et 9* présentent, sur une échelle logarithmique, l'évolution temporelle de l'écart normalisé pour les configurations (a) et (c).

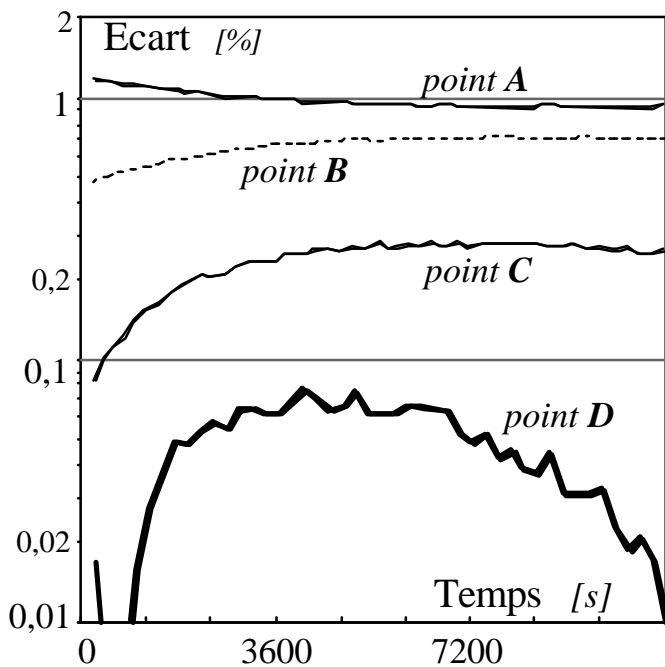


Figure 8.

Ecarts en quatre points du câble. Cas de la convection avec sillage ($w=0^\circ$). La condition limite est non uniforme et linéaire.

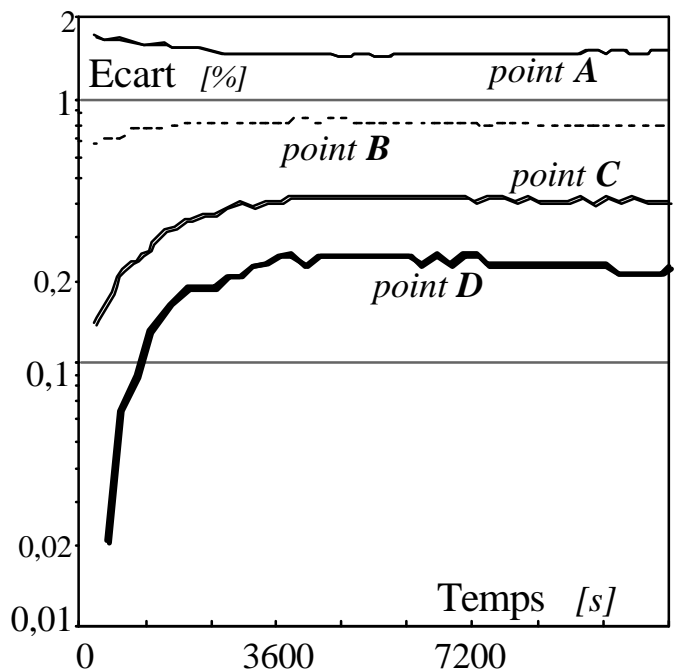


Figure 9.

Ecarts en quatre points du câble. Cas de la convection dans le sillage ($w=45^\circ$), couplée à du rayonnement infrarouge. La condition limite est non uniforme et non linéaire.

Malgré la petite dimension du modèle réduit, les courbes montrent globalement que les 'écarts sont faibles en tous points et à chaque instant. Ceci est vrai pour les trois configurations envisagées. La situation la plus défavorable est rencontrée dans la zone centrale du câble (point A) lors des premiers instants suivant la mise sous tension, et dans les trois cas. La moins bonne précision est obtenue pour le cas non linéaire et non uniforme (c), qui est le plus complexe. L'écart est au maximum de 1,7%. Ramené à une erreur absolue sur les températures, l'écart correspond à 0,93°C. L'observation des thermogrammes à différents instants montre que l'allure générale est bien respectée. Le modèle réduit ne provoque pas de concentration de l'erreur dans des zones particulières. C'est un point positif vis-à-vis de la fiabilité. Pour améliorer les résultats il faudrait réincorporer les effets des modes mineurs. L'amalgame modal est une solution possible. Soulignons que notre modèle ne change pas entre deux simulations pour s'adapter à une configuration particulière. C'était un de nos objectifs.

La précision obtenue est suffisante dans les études thermiques courantes. Si le modèle réduit donne de bons résultats, on peut aussi vérifier qu'il procure aussi un gain de temps calcul. La simulation du modèle complet demande 160s pour le cas (a) qui est linéaire (PentiumII-266MHz). En revanche il faut 8 h de calculs pour simuler chacun des deux cas (b) et (c), qui sont non linéaires. Avec le modèle réduit, chaque simulation ne dure pas plus de 20s. En tenant compte du temps nécessaire à la réduction, on trouve que le temps de calcul est diminué par un facteur 10. Si le nombre des cas traités augmente, il est facile d'extrapoler à partir des résultats précédents. Il n'y a que pour des problèmes linéaires que la simulation directe par le modèle éléments finis est plus performante à condition de ne pas vouloir traiter un trop grand nombre de configurations. Bien entendu, il ne faut pas circonscrire les qualités du modèle réduit à sa seule performance en temps de calcul. On citera par exemple, le pouvoir d'interprétation du fonctionnement d'un système à partir de l'analyse des éléments propres.

5. EXTENSIONS DE LA MÉTHODE.

Le travail présenté n'en est qu'à ses débuts. Nous avons fait la preuve qu'une réduction modale est possible dans le cas non linéaire, ou pour des conditions limites non uniformes. Un modèle unique a été obtenu. Il est utilisable pour des configurations variées. Le gain de temps en simulation est sensible. Toutefois l'étape initiale de détermination de la base de branche est longue. Il faudrait utiliser un algorithme de recherche des éléments propres par sous espaces. La difficulté est ici d'être certain d'obtenir au moins les modes dominants.

Les critères de réduction demande encore à être précisé, en particulier le choix des seuils d'éliminations pour le couplage et la dominance. Notons que dans ce dernier cas, l'extension de l'amalgame modal aux modes de branche qui est en cours devrait apporter une réponse satisfaisante.

Au chapitre des extensions, il est parfaitement envisageable de traiter des configurations où les paramètres varient dans le temps. Par exemple, dans le cas du câble, le sillage est instationnaire et le coefficient d'échange varie dans le temps de manière périodique au gré des lâchers des tourbillons (*la fluctuation est rapide et nous l'avons négligé*). Un frein à disque constitue un autre exemple où les paramètres varient au cours du temps. C'est évidemment le cas pour la vitesse de rotation du disque et pour le frottement avec la plaquette. Le traitement de ce système par mode de branche n'est pas envisageable en l'état. En effet, l'opérateur de la chaleur contient ici un terme de transport. Il devient non auto-adjoint. L'analyse modale des systèmes thermiques non auto-adjoints a déjà été étudiée dans le cadre de la théorie linéaire [Kho.89]. Il reste à adapter le concept de mode de branche à ce type d'opérateur.

BIBLIOGRAPHIE.

[Bac.84] BACOT P. « Analyse modale des systèmes thermiques », Thèse de Docteur Ingénieur, Université P.&M. CURIE, Paris, Février, 1984.

¹ Université d'Evry CEMIF/GMFE.

alain.neveu@wanadoo.fr

² Université Libanaise Beyrouth.

kekam@inco.com.lb

- [Bai.97] F. BAILER, P. TOCHON, J.M. GRILLOT, P. MERCIER. "Simulation numérique de l'écoulement et du transfert de chaleur autour d'un cylindre". Rev. Gén. Therm., No. 36, pp. 744-754, 1997.
- [Bat.98] BATTAGLIA J.L., NEVEU A. « Identification du flux de chaleur dans un procédé d'usinage. Utilisation d'un modèle modal réduit ». Congrès SFT, Marseille, Mai 1998.
- [Cha.98] A. CHAHINE. "Développement de méthodes de réduction pour des modèles modaux de branche en thermique". DEA "Modélisation et Ingénierie du Logiciel Scientifique", Université Libanaise, Beyrouth, Septembre 1998.
- [Deq.97] DEQUE F., DELILLE S., DAUTIN S. « Réduction d'un système linéaire et invariant par technique de Moore. Application à la thermique du bâtiment ». Rev. Gén. Therm., N° 36, pp. 170-179, 1997.
- [Fla.93] B. FLAMENT, F. BOURQUIN, A. NEVEU. "Synthèse modale : une méthode de sous structuration dynamique pour la modélisation des systèmes thermiques linéaires". Int. J. H. Mass Transfert, Vol. 36, pp.1649-1662, 1993.
- [Kho.89] EL KOURY K. « Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport ». Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1989.
- [Khou.89] EL KOURY K., NEVEU A « Analyse modale de systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques ». Int. J; Heat Mass Transfert, Vol. 32, N° 2, pp. 213-226, 1989.
- [Kho.94] K. EL KHOURY, M. ANASTASSIOU, B. FLAMENT. « Simulation de systèmes thermiques non linéaires à l'aide de modèles réduits ». Journée SFT « Réduction des modèles en thermique », Paris 30/11/1994.
- [Lem.94] LE MOUEL A., NEIRAC F, NAÏSI N « Equation de la chaleur. Solution par approximation optimale au sens de la norme de hankel ». Rev. Gén. Therm., N° 389, pp. 336-343, Mai 1994.
- [Mic.84] MICHAILESCO G., DUC G. « L'approche de la réduction des modèles en automatique: Classification des principales méthodes ». Conf. « Modélisation et Simulation en Thermique », ESMA,
- [Nev.99] A. NEVEU, K. EL. KHOURY, B. FLAMENT. "Simulation de la décomposition non linéaire en régime variable: Décomposition sur les modes de branche". Int. J. Therm. Sci (1999) 38, 289-304.
- [Neve.99] A. NEVEU, K. EL. KHOURY. "Réduction par modes de branche. Application à un câble composite". Journée GUT-SFT « Réduction de modèles en thermique » Paris 5 Mai 1999.
- [Nei.89] NEIRAC F.P. « Approche théorique et expérimentale des modèles réduits du comportement thermique des bâtiments ». Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de paris, Mars 1989.
- [Oul.93] A. OULEFKI. "Réduction de modèles thermiques par amalgame modal". Thèse de Doctorat de l'Ecole des Ponts et Chaussées, Février 1993.
- [Oule.93] A. OULEFKI, A. NEVEU. "Réduction par amalgame modal d'un modèle thermique". Journal de Physique III, N° 2, pp. 303-320, Février 1993.
- [Pet.91] PETIT D. « Réduction de modèles de connaissance et identification de modèles d'ordre réduit. Application aux processus de diffusion thermique ». Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Provence, Marseille, 1991.
- [Pet.96] PETIT D., PERUZZI S. « Régularisation d'un problème inverse en conduction par l'utilisation d'un modèle réduit identifié ». Congrès SFT: Thermique et transports, pp. 114-119, 1996.
- [Sau.83] SAULNIER J.B. « La réduction des modèles en thermique ». AI83. IASTED Symposium, Lille, Mars 1983.

ANNEXE 1. Solution analytique pour les modes de branche d'un cylindre homogène.

On considère un cylindre homogène de rayon R , de conductivité k et d'effusivité a . À l'ordre i d'un élément propre (classement décroissant des constantes de temps), on associe le triplet d'indices $\{n, m, p\}_i$. Les indices n et m peuvent prendre la valeur 0. L'indice p vaut 1 ou 2. Le mode de branche s'écrit comme le produit d'un cosinus (suivant l'angle) par une fonction de Bessel (suivant le rayon) :

$$\forall (r, \varphi) \in [0, R] \otimes [0, 2\pi] \quad V_i(r, \varphi) = \text{Cos} \left[n \left(\varphi + j_p \right) \right] J_n \left[a_{n,m} \frac{r}{\sqrt{a}} \right] \quad (\text{A-1})$$

Le mode n n'est pas normé ici. $\alpha_{n,m}$ est la $m^{\text{ième}}$ racine de l'équation transcendante, à n donné :

$$\left(\frac{k}{\sqrt{a}} a_{n,m} \right) J_{n+1} \left[a_{n,m} \frac{R}{\sqrt{a}} \right] + \left(z a_{n,m}^2 - n \frac{k}{R} \right) J_n \left[a_{n,m} \frac{R}{\sqrt{a}} \right] = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$\text{Cette racine est reliée à la valeur propre de branche par :} \quad l_i \equiv -a_{n,m}^2 \quad (\text{A-3})$$

On peut montrer que si $n \neq 0$, les modes sont doubles. Ils se différencient par le déphasage φ_p . La relation d'orthogonalité permet d'écrire :

$$j_1 \equiv 0 \quad j_2 = j_1 + \frac{p}{2n} \quad (\text{A-4})$$

Notons qu'il peut exister des modes de même trace, associés à des valeurs propres distinctes (même indice n et p). Dans ce cas, le terme surfacique de leur produit scalaire n'est pas nul, bien que ces modes soient

orthogonaux. Ces éléments propres sont donc couplés. On peut aussi remarquer que pour n grand il sera délicat de reconstituer par éléments finis des modes doubles. La limitation est liée à la finesse du maillage de la surface.

ANNEXE 2. Description du câble chauffant

Matériau	conductivité $W m^{-1} K^{-1}$	capacité $J m^{-3} K^{-1}$	masse volumique $kg m^{-3}$
magnésie (1)	3,5	1130	1800
aluminium (2)	215	896	2707
acier inox (3)	14	510	7900

Tableau A1 Caractéristiques des matériaux

Facteur d'émission $e = 0,8$ [-].

Température de l'air : $T_{cv} = 30$ [°C]

Température de l'enceinte $T_{ry} = 30$ [°C]

Puissance dissipée dans un conducteur : $\overline{\varpi} = 10^6$ [W m⁻³]

Dimensions : $e = 5$ mm $d = 1$ cm

$f_1 = 6$ cm $f_2 = 1$ cm

A : centre du câble

B : centre de la résistance électrique en aluminium.

C : surface du câble à 45° du point d'attaque si $w = 0^\circ$.

D : point situé dans la magnésie derrière la deuxième résistance

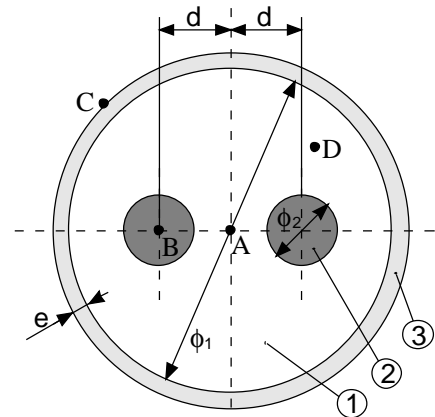


Figure A.1.