

Tentative d'écriture d'un formalisme modal pour les équations de diffusion-transport non linéaires et à paramètres instationnaires.

A. NEVEU, O. QUEMENER, E. VIDECOQ

Résumé :

Un problème de diffusion transport peut recevoir une solution analytique formelle, tel un développement en série. Il faut connaître un ensemble de solutions particulières qui constitue une base de l'espace des solutions. Dans la liste des fonctions de base éligibles, figurent les modes propres de l'opérateur de diffusion et transport. Sous forme classique, les conditions limites font partie intégrante des modes. Elles doivent donc être linéaires. Ceci limite l'utilisation de ces modes. En effet, sous peine de rencontrer des discontinuités ou des difficultés de convergence des séries, les champs thermiques décomposés doivent vérifier des conditions limites de même nature que les modes.

On présente une tentative d'écriture d'un formalisme modal pour des problèmes non linéaires. A cette fin, une nouvelle classe de modes est recherchée : les modes de branche. On montre le potentiel d'adaptation de ces modes. L'analyse spatiale et temporelle de la base de branche permet de comprendre pourquoi la solution série peut être tronquée. On aborde les problématiques liées à cette technique, et qui demeurent ouvertes aujourd'hui.

LMEE

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry ;

Université d'Evry

Adresse du Groupe Energétique du LMEE :
Département Génie Thermique et Energie
IUT de Brétigny
Chemin de la tuilerie
91 731 Brétigny sur Orge

NEVEU Alain	alain.neveu@wanadoo.fr	Tél : 01 69 47 79 40 Fax : 01 69 47 79 47
QUEMENER Olivier	o.quemener@iut.univ-evry.fr	Tél : 01 69 47 79 35 Fax : 01 69 47 79 47
VIDECOQ Etienne	E.Videcoq@iut.univ-evry.fr	Tél : 01 69 47 79 37 Fax : 01 69 47 79 47

Tentative d'écriture d'un formalisme modal pour les équations de diffusion-transport non linéaires et à paramètres instationnaires.

A. NEVEU, O. QUEMENER, E. VIDECOQ

Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry ; Université d'Evry

1. Motivations de la démarche.

La modélisation d'un système thermique en régime varié peut être étudiée, sous certaines conditions, par voie analytique. Malheureusement les cas où le calcul analytique peut être mené complètement sont extrêmement rares. Le plus souvent on se contente d'une solution semi-analytique. Par exemple pour la méthode de séparation des variables, la série infinie doit être tronquée et l'équation transcendante résolue numériquement. Malgré tout, par rapport à une méthode purement numérique, cette démarche semi-analytique permet l'accès à une forme du modèle qui peut être analysée sans nécessairement faire des simulations. On peut, par exemple, réduire le modèle à ces termes essentiels. Ce dernier point est particulièrement intéressant lorsque le modèle est utilisé en commande, pour résoudre des problèmes inverses ou pour identifier des paramètres.

La méthode modale consiste à décomposer le champ de température sur une base de solutions particulières des équations gouvernant le système à modéliser : la base des modes propres. Pour obtenir les coefficients de décomposition, on projette les équations sur la base propre ce qui donne un jeu d'équations d'états. Si le système est linéaire avec des paramètres indépendants du temps et des conditions limites simples l'approche modale est performante. Dans sa forme le modèle est analytique (équation d'état, décomposition), mais il n'est pas possible le plus souvent de déterminer l'expression analytique des modes. Dans le cas de géométries complexes les modes propres sont approchés numériquement par une méthode variationnelle. On utilise par exemple un maillage et une approximation par éléments finis. Ces approximations sont ensuite utilisées pour calculer les termes de l'équation d'état.

À l'origine les méthodes modales ont été développées dans le cadre des systèmes linéaires. On bénéficie ici d'un important support théorique de l'analyse fonctionnelle. Nous proposons ici une tentative d'écriture d'un formalisme analytique modal pour des systèmes non linéaires avec des paramètres instationnaires et des conditions aux limites non uniformes. La difficulté essentielle est la définition de l'espace de travail et la recherche de la preuve que les fonctions propres utilisées forment bien une base de cet espace de travail. Nous verrons que la démarche est possible, bien que les démonstrations soient encore incomplètes à ce jour pour certaines configurations.

2. Un exemple élémentaire de décomposition modale.

2.1 Solution modale.

Prenons un exemple volontairement élémentaire, dans le but d'identifier les limites de l'approche modale linéaire « classique ». Il s'agit d'un domaine unidimensionnel d'épaisseur l . Une des faces est adiabatique, l'autre échangeant par convection avec un fluide. Les points internes sont soumis à un dégagement de puissance de densité constante ν . L'évolution de la température est gouvernée par les équations suivantes :

$$X \in]0,1[\quad -\frac{a}{l^2} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\nu}{c} - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1-a)$$

$$X=0 \quad \frac{\partial T}{\partial X} = B_i^o T \quad (1-b) \quad X=1 \quad \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (1-c)$$

$$\text{Condition initiale} \quad X \in]0,1[\quad t=0 \quad T(X, 0) = 0 \quad (1-d)$$

B_i^o désigne le nombre de Biot. Ici tous les coefficients sont constants ($a = k/c$ est la diffusivité thermique). Cherchons la solution sous la forme d'un développement en série :

$$T(X, t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t) V_j(X) \quad (2)$$

La solution est classique (problème de *Sturm-Liouville*). Les V_j sont les modes propres de l'opérateur de diffusion. Ils forment une base pour les champs définis dans le domaine et vérifiant les conditions limites homogènes (1-b) et (1-c). Les modes propres satisfont les équations :

$$X \in]0,1[\quad \frac{\partial^2 V_j}{\partial X^2} = \frac{l^2}{a} z_j V_j \quad (3-a)$$

$$X=0 \quad \frac{\partial V_j}{\partial X} = B_i^o V_j \quad (3-b) \quad X=1 \quad \frac{\partial V_j}{\partial X} = 0 \quad (3-c)$$

Notons que les conditions limites sont homogènes. Les valeurs propres z_i sont les solutions de l'équation transcendante:

$$z_j \equiv -\frac{a}{l^2} b_j^2 \quad \text{avec} \quad \tan b_j = \frac{B_i^o}{b_j} \quad (4)$$

Le nombre de Biot apparaît explicitement dans (4). Les conditions aux limites font partie intégrante de la définition de cette base modale. Nous l'appellerons base de Fourier. Il en serait de même avec d'autres conditions limites (Dirichlet, Neumann).

Les modes propres V_j s'écrivent :

$$V_j = A_j \left(\cos b_j X + \frac{B_i^o}{b_j} \sin b_j X \right) \quad (5)$$

Ils sont orthogonaux. Nous avons calculé les coefficients A_j pour qu'ils soient orthonormés :

$$\int_0^1 V_j V_k dX = d_{j,k} \quad A_j = 2\sqrt{b_j} \left(I_0 + \frac{2B_i^o}{b_j} I_1 + \left(\frac{B_i^o}{b_j} \right)^2 I_2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

$$I_0 = 2 b_j + \sin 2 b_j \quad I_1 = 1 - \cos 2 b_j \quad I_2 = 2 b_j - \sin 2 b_j$$

La série (2) converge très rapidement. Prenons le cas de la décomposition du régime permanent. La *figure 1* montre le champ exact et sa projection sur le premier mode de Fourier. L'écart est très faible. Au-delà de 10 termes l'erreur devient totalement insignifiante (*figure 2*). Bien entendu ceci n'est qu'un exemple, la réduction étant particulièrement efficace dans le cas présent. Pour des systèmes plus complexes et avec des champs dynamiques, il faut conserver un nombre plus élevé de modes. Toutefois, et c'est l'intérêt de l'approche modale, un petit nombre de modes suffit à bien reconstituer l'intégralité du champ de température. L'efficacité de la méthode est liée à deux propriétés. D'une part les modes propres forment une base de l'espace des fonctions solutions de (1). D'autre part, il y a une dominance modale [Oulefki 93]. Il faut toutefois prendre garde à ne pas « oublier » des hypothèses imposées par notre démarche. En voici un exemple symptomatique.

2.2 Incompatibilité aux limites.

Imaginons le nouveau problème physique, gouverné par des équations semblables à (1), mais où on substitue à (1-b) la condition limite de convection modifiée (7-b) :

$$X \in]0,1[\quad -\frac{a}{l^2} \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{v}{c} - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7-a)$$

$$X=0 \quad \frac{\partial T}{\partial X} = B_i T \quad (7-b) \quad X=1 \quad \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (7-c)$$

Nous supposons que B_i est différent de B_i^0 . On peut faire une projection, notée \tilde{T} , du champ T solution de (7) sur la base modale de l'opérateur lié à (1). Nous utilisons l'orthogonalité pour trouver l'expression des coefficients de décomposition. Reprenons l'exemple du régime permanent, qui s'écrit simplement :

$$T(X, \infty) = \frac{\sqrt{l^2}}{k} \left(-\frac{X^2}{2} + X + \frac{1}{B_i} \right) \quad (8)$$

En se limitant au n premiers modes nous écrivons :

$$\tilde{T}_n(X, t) = \sum_{j=0}^n \tilde{x}_j(t) V_j(X) \quad (9-a) \quad \frac{\partial \tilde{T}_n}{\partial X}(X, t) \equiv \sum_{j=0}^n \tilde{x}_j(t) \frac{\partial V_j}{\partial X}(X) \quad (9-b)$$

$$\text{avec } \tilde{x}_j = \int_0^1 T(X, \infty) V_j(X) dX \quad (9-c)$$

La *figure 2* montre la projection avec une base réduite aux dix premiers modes ($n = 10$). Le résultat n'est pas très bon, ce qui contraste avec le cas traité précédemment. On peut se demander si en augmentant le nombre des modes, les sommes (9-a) et (9-b) se rapprochent bien de la solution (8). La réponse est négative, comme le confirment les *figures 3-a et b*. La série en température converge très lentement mais la série en flux ne converge pas. En augmentant le nombre de modes l'erreur se concentre sur la surface. A la limite, on obtiendrait un saut ponctuel, au sens des distributions [Schwartz 83], du flux en $X = 0$. Pourquoi la technique modale, si efficace pour résoudre l'équation (1), est en échec devant l'équation (5) qui lui est pourtant très semblable ?

Les deux problèmes (1) et (7) ne sont pas équivalents vis-à-vis de la base modale. Les fonctions propres ne forment plus une base pour les champs solutions des équations (7), car il y a incompatibilité entre les conditions aux limites (3-b) et (7-b). Même en augmentant à l'infini le nombre des modes, le rapport entre la température et le flux en surface, sera toujours égal à B_i^0 et non à B_i .

En revanche, quelle que soit la forme d'un champ de température à l'intérieur du domaine, celui-ci est décomposable sur la base modale, pourvu que ce champ vérifie des conditions limites homogènes identiques à celles vérifiées par les modes. Par exemple le dégagement de puissance peut être absolument quelconque, le champ solution sera décomposable. Ceci est vrai même si le dégagement de puissance dépend de la température, ce qui constitue un problème non linéaire. Il restera à trouver dans ce cas l'équation donnant les coefficients de décomposition, mais nous aborderons ce point plus loin. Pour l'instant nous souhaiterions avoir une base modale plus riche sur les frontières. Remarquons que l'équation (3-a) fait apparaître explicitement la valeur propre. La dépendance du mode à son gradient n'est donc pas figée dans le domaine comme c'est le cas pour les points situés aux frontières et associés à des conditions de Dirichlet, Neumann ou Fourier. Dans cet esprit, pourquoi ne pas faire apparaître la valeur propre dans les conditions aux limites ? Ceci donnerait pour les points situés sur la frontière des degrés de liberté supplémentaires pour décrire la dépendance du mode à son gradient.

3 Base de branche.

3.1 Espace de travail.

La première question à se poser si l'on souhaite étendre le champ d'application de la technique modale est : « Les fonctions propres utilisées forment-elles une base et de quel espace ? ».

Définissons tout d'abord trois espaces vectoriels de fonctions à valeurs complexes définies dans un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3)

$H_0^1(\Omega)$ est l'espace de Hilbert des fonctions qui s'annulent sur la frontière (*Dirichlet*) :

$$H_0^1(\Omega) \equiv \left\{ u(M), M \in \Omega \mid u \in L^2(\Omega) \wedge \nabla u \in L^2(\Omega) \wedge u(M) = 0, M \in \partial\Omega \right\} \quad (10-a)$$

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace des fonctions à *relèvement harmonique* :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \equiv \left\{ v(M), M \in \partial\Omega \left| \begin{array}{l} v \in L^2(\partial\Omega) \wedge v = \text{Trace}_{\partial\Omega} [v^\Delta], M \in \partial\Omega \\ \wedge \Delta v^\Delta = 0, M \in \Omega \wedge \nabla v^\Delta \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \right\} \quad (10-b)$$

Enfin $H^1(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions définies dans le domaine et sur sa frontière, tel que :

$$H^1(\overline{\Omega}) \equiv H_0^1(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \quad (10-c)$$

Il est clair que les solutions des problèmes (1) et (7) n'appartiennent pas aux espaces $H_0^1(\Omega)$ et $H^{1/2}(\partial\Omega)$. En revanche, elles appartiennent à des sous-espaces de $H^1(\overline{\Omega})$. Ces sous-espaces sont d'ailleurs différents l'un de l'autre, d'où le problème de non décomposabilité rencontré précédemment. On conçoit à présent l'intérêt de rechercher une base de l'espace $H^1(\overline{\Omega})$.

3.2 Problème aux valeurs propres de branche.

Nous limiterons notre présentation aux systèmes thermodynamiques fermés. Introduisons un nouveau problème modal, qui s'écrit sous forme locale :

$$M \in \Omega \quad -\underline{\nabla} \cdot (\underline{k}_o \cdot \underline{\nabla} V_j) + c_o \underline{U}_o \cdot \underline{\nabla} V_j = -z_j c_o V_j \quad (11-a)$$

$$M \in \partial\Omega \quad \underline{k}_o \cdot \underline{\nabla} V_j \cdot \underline{n} = -z_j z V_j \quad (11-b)$$

La condition limite (11-b) est une *condition de Steklov*. Le paramètre numérique ζ permet de maintenir l'homogénéité dimensionnelle [Neveu 99-INTS]. Dans ces équations les paramètres k_o et c_o sont uniquement des fonctions de l'espace, continues par morceaux.. Le problème (11) peut être mis sous une forme variationnelle faible :

« Trouver les fonctions propres V_j appartenant à l'espace $H^1(\overline{\Omega})$ et telles que :

$$\forall g \in H^1(\overline{\Omega}) \quad \mathbf{A} (V_j, g) = -z_j \mathbf{C} (V_j, g) \quad (13-a)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{A} (f, g) = \int_{\Omega} \left(\underline{\nabla} f \cdot \underline{k}_o \cdot \underline{\nabla} \bar{g} + c_o \underline{U}_o \cdot \underline{\nabla} f \bar{g} \right) dv \quad (13-b)$$

$$\mathbf{C} (f, g) = \int_{\Omega} c_o f \bar{g} dv + \int_{\partial\Omega} z f \bar{g} da \quad (13-c) \quad \gg$$

\mathbf{C} est une forme bilinéaire symétrique positive. Elle définit un produit scalaire dans $L^2(\overline{\Omega})$. La forme intégrale \mathbf{A} est bilinéaire à coefficients réels et définit un produit scalaire dans $H^1(\overline{\Omega})$. En l'absence de champ de vitesse, elle est symétrique et positive. Dès que le champ de vitesse n'est plus nul, les transferts sont non réciproques et l'opérateur n'est plus auto-adjoint [El Khoury 89-IJHMT], ce qui complique singulièrement les démonstrations.

On peut établir les résultats principaux suivants :

- Il existe une suite infinie dénombrable de valeurs propres z_j solutions du problème (13).
- Les fonctions propres $\{V_j\}$ forment une base complète de $H^1(\overline{\Omega})$.
- Il existe une famille adjointe $\{V_j^*\}$. Les valeurs propres adjointes vérifient $z_j^* = \bar{z}_j$
- On a les propriétés d'orthogonalité entre les modes et leurs adjoints:

$$\mathbf{A} (V_j, V_k^*) = -z_j d_{j,k} \quad (14-a)$$

$$\mathbf{C} (V_j, V_k^*) = d_{j,k} \quad (14-b)$$

Il n'est pas question dans cette courte présentation de reproduire les démonstrations de ces propriétés. Donnons simplement les grands principes. Dans le cas auto-adjoint, ces résultats découlent du « théorème abstrait » [Dautray 85] qui s'applique à la classe des problèmes aux valeurs propres définis par (13-a). Il suffit seulement que les deux formes \mathbf{C} et \mathbf{A} soient bilinéaires, symétriques et définies positives, ce qui est bien le cas d'un problème de diffusion.

Si l'opérateur est non autoadjoint on invoque un résultat général d'analyse fonctionnelle sur les faisceaux linéaires d'opérateurs, dont la preuve est établie dans [Keldysh 51] et [Keldysh 71]. Le faisceau est constitué d'une somme d'un opérateur symétrique et d'un terme non-autoadjoint qui joue en quelque sorte le rôle d'une perturbation. La démarche suivie dans [Krukovskii 76] permet de ramener le problème (13) à la forme de Keldysh, et à un problème annexe de valeurs propres classique du Laplacien. Pour les systèmes thermiques, cette démarche a été donnée initialement dans [El Khoury 89], y compris pour des systèmes ouverts, mais uniquement avec des conditions limites figées (Dirichlet, Neumann et Fourier). L'adaptation au problème de branche nécessite de reprendre la démonstration au niveau du théorème de Krukovskii. Une des clés consiste à modifier les produits scalaires pour changer d'opérateur. On retrouve alors un problème de recherche des valeurs propres de branche du Laplacien, associé à l'opérateur de capacité C et au nouveau produit scalaire. Une fois ces résultats établis, il reste encore à encadrer les valeurs propres de branche de cet opérateur, afin de démontrer la convergence de la série des valeurs propres. Cette propriété est nécessaire pour prouver que l'opérateur est d'ordre fini (définition selon Krukovskii). Nous utilisons une technique inspirée de [Hirsch 97]. Notons pour finir que dans le cas des systèmes thermodynamiques fermés le premier mode est constant et la valeur propre associée est nulle.

3.3 Décomposition du champ de température.

Reprenons l'exemple élémentaire du §2 et appliquons-lui les résultats de l'étude de la base de branche. Puisque le premier mode est constant il faut au minimum deux modes pour avoir une décomposition acceptable (*figure 4-a*). Nous notons que cette fois l'erreur est faible quel que soit le nombre de Biot retenu pour la condition de frontière (1-b) ou (7-b) en $X = 0$. La solution ne conservant que 10 modes est excellente (*figure 4-b*). Au-delà, la décomposition converge en tout point vers la solution exacte. Le phénomène de saut de flux en surface a disparu. Ceci ne doit pas surprendre puisque les modes de branche forment une base de l'espace auquel appartiennent les solutions de (1) et (7).

Bien entendu, on souhaite traiter des configurations plus consistantes. Considérons le système physique gouverné par les équations d'évolution non linéaires et non stationnaires :

$$M \in \Omega \quad -\underline{\nabla} \cdot (\underline{k}(M, T) \cdot \underline{\nabla} T) = \underline{\nabla} \cdot c(M, T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (15-a)$$

$$M \in \partial \Omega \quad \underline{k}(M, T) \cdot \underline{\nabla} T \cdot \underline{n} = h(M, T) (T_{ex} - T) \quad (15-b)$$

Dans ces équations la conductivité et la capacité peuvent toujours se mettre sous la forme :

$$\underline{k}(M, T) \equiv \underline{k}_o(M) + \underline{k}_1(M, T) \quad c(M, T) \equiv c_o(M) + c_1(M, T)$$

Les termes constants servent à définir le problème aux valeurs propres de branche (13) avec $U_o = 0$. On peut retenir par exemple la valeur moyenne. Le problème (15) admet une formulation variationnelle faible. Puisque l'opérateur est autoadjoint dans le cadre de cette présentation, on peut se restreindre à des fonctions à valeurs réelles, soit :

$$\begin{aligned} & \ll \text{Trouver le champ } T \in]0, t] \times H^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \forall g \in H^1(\overline{\Omega}) \\ & \int_{\Omega} \underline{\nabla} T \cdot \underline{k} \cdot \underline{\nabla} g \, dv = \int_{\Omega} \underline{\nabla} g \, dv + \int_{\Omega} -c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} g \, dv + \int_{\partial \Omega} h (T_{ex} - T) g \, da \gg \quad (16) \end{aligned}$$

La solution étant recherchée dans $H^1(\overline{\Omega})$, elle est décomposable sur la base des modes de branche. En utilisant toujours le fait que ces modes forment une base, on peut remplacer dans (16) la condition « $\forall g \in H^1(\overline{\Omega})$ » par « $\forall V_k$ ». L'équation donnant les états est obtenue par projection sur la base modale. Concrètement, nous remplaçons dans (16) le champ T par sa décomposition (2) et nous écrivons cette relation pour chaque mode $g = V_k$. Nous trouvons après calcul :

$$z_j x_j = \sum_{k=0}^{\infty} g_{jk} \dot{x}_k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(g_{jk}^1(\tau) \dot{x}_k + k_{jk}^1(\tau) x_k \right) - j_j(x, \tau) - x_j(\tau) \quad (17)$$

$$\text{sollicitation} \quad x_j(\tau) \equiv \int_{\Omega} v(M, \tau, t) V_j(M) dv + \int_{\partial\Omega} h(M, \tau) T_{ex}(M, t) V_j(M) da$$

$$\text{couplage linéaire} \quad g_{jk} \equiv d_{jk} - \int_{\partial\Omega} z V_j V_k da$$

$$\text{couplages non linéaires} \quad g_{jk}^1(\tau) \equiv \int_{\Omega} c_1(M, \tau) V_j(M) V_k(M) dv$$

$$k_{jk}^1(\tau) \equiv \int_{\Omega} \underline{\nabla} V_j(M) \cdot \underline{k}_1(M, \tau) \cdot \underline{\nabla} V_k(M) dv$$

$$j_{j(x, \tau)} \equiv - \int_{\partial\Omega} h(M, \tau) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) V_k(M) \right) V_j(M) da$$

Les équations (17) ne sont pas linéaires. Les sommes infinies restent cependant bornées. Contrairement au cas linéaire où les équations d'états étaient découplées (système diagonal), cette fois tous les états sont interdépendants, au moins formellement si on se réfère aux expressions analytiques des coefficients. La condition de Steklov sur la frontière est différente de la condition limite (15-b). Cependant ici il n'y a pas réellement d'incompatibilité comme au §2. Le champ reste décomposable mais il y a apparition d'un couplage linéaire, matérialisé par la matrice g , qui est intrinsèquement liée à la base de branche. Les non-linéarités internes et externes engendrent elles-aussi des couplages, représentés respectivement par g^1 , k^1 et j . Ainsi la représentation modale non linéaire à partir de la base de branche ne conserve pas la superposition des états. S'agissant d'un problème non linéaire ce résultat ne doit pas surprendre.

Pour la mise en œuvre effective du calcul il est nécessaire de tronquer les sommes. On se contente alors de la projection de (16) sur un sous-espace de dimension n . L'étape initiale consiste à déterminer un premier sous-espace modal de dimension N , dont la plus petite constante de temps (inverse de la valeur propre) est de l'ordre de grandeur du $1/10^{\text{ème}}$ du pas d'observation temporelle du système étudié. Si ce sous-espace est déterminé à l'aide d'une approximation par éléments finis, il faudra utiliser un maillage dont le nombre de nœuds est de l'ordre de $N_o \approx N / \sqrt{e}$ si e désigne la précision relative tolérée sur les valeurs propres [Sainsaulieu 96]. Typiquement avec 1% d'erreur il faut $N_o \geq 10 N$. Pour des applications industrielles où les contraintes sur la qualité de la représentation géométrique du domaine imposent une certaine finesse du maillage, le critère est largement respecté.

Conséquence du couplage des états, si on augmente l'ordre de la base initiale de n à $n + m$, il s'ajoute au modèle non seulement m nouvelles équations, mais aussi m termes supplémentaires dans chacune des n équations d'états de la base initiale. De plus les coefficients j , g^1 , k^1 de ces n équations sont aussi modifiés. Fort heureusement dans la pratique on constate une dominance de certains modes, et des découplages numériques [Neveu 00-RFM]. C'est le cas des modes dont le champ est localisé près de la surface (*figure 5-c et d*). Ils évoluent de manière pratiquement indépendante des autres modes. Comme ils sont associés à des constantes de temps faibles, leurs contributions disparaissent rapidement. La comparaison du terme volumique et du terme surfacique de la norme induite par le produit scalaire (14-b) permet de classer les modes selon trois catégories : volumique, surfacique et global (*figure 6*). On peut analyser la matrice g , qui caractérise partiellement le couplage des modes. Nous avons constaté que les modes globaux sont fortement couplés. Mais ils sont « lents » et peu nombreux. Au-delà d'un certain ordre on ne rencontre plus que des modes surfaciques et volumiques. Dans la matrice g seuls subsistent numériquement les termes diagonaux. Enfin les modes dont la constante de temps est très inférieure au pas d'observation ne jouent pas de rôle dynamique. L'association de ces critères élémentaires fournit un premier guide de réduction.

4 Exemples.

On traite le cas du refroidissement rapide (solidification) d'une plaque rectangulaire percée de deux trous. Elle est isolée sur trois de ses faces. La quatrième face ainsi que les deux trous échangent par convection avec un fluide (*figure 7*). La capacité calorifique varie fortement avec la température (*figure 8*). Le pic très marqué, qui correspond à une modélisation enthalpique d'un changement d'état, est caractéristique des corps purs. Les paramètres physiques sont proches de ceux de l'aluminium.

Il n'existe pas d'expression analytique pour les modes de branche dans une telle configuration géométrique. Ils sont calculés par approximation par éléments finis (2803 nœuds). On se limite à un sous espace propre engendré par les 100 premiers modes. Ces modes servent à évaluer de manière approchée les intégrales donnant les coefficients de l'équation d'état, puis la décomposition du champ de température. Différentes réductions ont été imaginées en utilisant le classement de la *figure 6*. On présente le modèle réduit d'ordre 13. A l'instant initial la température est uniforme. Les *figures 9 et 10* présentent l'évolution des températures et des erreurs en plusieurs points. On a comparé le résultat avec un calcul direct par éléments finis (MatLab/FemLab). Ici une petite erreur sur les températures dans la zone du pic de capacité se répercute de manière très sensible sur l'énergie dissipée, et il faut contrôler finement le pas de temps et les paramètres de convergence quel que soit le modèle. Sans pouvoir le démontrer, il semble sur cet exemple que le modèle modal est moins sensible à ces choix de paramètres. Dans ce type d'application les ingénieurs s'intéressent principalement aux vitesses de refroidissement (trempe des métaux, fonderie) qui sont très bien retrouvées par le modèle réduit.

5 Perspectives et points de blocage.

La démarche de construction d'une solution modale analytique formelle qui vient d'être décrite est très générale. On peut généraliser l'opérateur en ajoutant un terme intégral non local de type rayonnement linéarisé. Un résultat de [Krukovskii 77] permet là encore de retrouver la forme de Keldysh. On peut donc être raisonnablement optimiste sur le caractère « généraliste » de la démarche.

Toutefois la démonstration de l'existence et de la complétude de la base pour les systèmes ouverts n'est pas achevée et se heurte à de grandes difficultés techniques. Le théorème de Keldysh introduit en effet de nouveaux produits scalaires dont il faut montrer ici l'existence même. Entre autres difficultés il faut s'assurer de la positivité pour un système ouvert. Les intégrales qui portent sur les surfaces perméables d'entrée et de sortie ne jouent malheureusement pas un rôle symétrique. L'utilisation « astucieuse » du principe de conservation de la masse et des conditions cinématiques imposées au champ de vitesse devrait peut-être permettre de lever cette difficulté.

Pour les systèmes fermés, ce qui recouvre déjà un nombre d'applications conséquent, la méthode est prouvée. Des tests doivent confirmer la capacité de la base à être tronquée. En effet ici il n'est pas possible, même avec des sollicitations élémentaires, de trouver des solutions explicites aux équations d'état. Un premier critère de dominance a été mis au point, via une matrice de couplage, mais il est encore sommaire. Le critère de localisation spatiale des modes a aussi été utilisé. Les exemples traités ici et antérieurement [Neveu 99-IJTS], [Neveu 00-RFM] sont encourageants. Notons cependant que dans certains cas, en utilisant ces critères simples, la reconstitution modale peine à se rapprocher de la solution de référence, sans que nous sachions l'expliquer pour l'instant.

Enfin l'approximation numérique des modes de branche soulève des difficultés lors du traitement des systèmes non réciproques où les vitesses sont importantes (nombre de Péclet). Malgré l'utilisation d'un algorithme performant (méthode d'Arnoldi, [Chatelin 88], [Lascaux 87]) et d'une discrétisation par éléments finis, la détermination de la base propre constitue un goulot d'étranglement de la méthode. Une technique de calcul par synthèse modale [Flament 93] pourrait s'avérer nécessaire pour des géométries compliquées.

La résolution de l'équation d'état non linéaire ne peut être envisagée que numériquement si les sollicitations sont réelles. Le formalisme modal permet d'obtenir un système d'équations différentielles non linéaires de taille réduite. En contrepartie il est plein, contrairement au cas modal classique où il était diagonal. On utilise des algorithmes standards. Le temps de calcul n'est pas

uniquement lié à la taille du système. La complexité d'évaluation des termes non linéaires intervient aussi. Notons que ces problèmes ne sont pas spécifiques à l'approche modale développée, mais sont le lot commun de la résolution des systèmes non linéaires.

La formulation modale analytique que nous venons de présenter est d'un grand intérêt du point de vue théorique. Elle permet d'asseoir la pertinence de la recherche de son approximation numérique en assurant la convergence des solutions. D'autre part cette formulation analytique légitime l'écriture d'un modèle réduit non linéaire sous forme modale de branche. Ces paramètres peuvent alors être recherchés par différentes techniques, par exemple par identification. Enfin il est possible de faire une analyse de perturbation sur les modes de branche et de l'utiliser pour observer comment réagit le modèle non linéaire.

Bibliographie.

- [Chatelin 88] F.CHATELIN – “ Valeurs propres de matrices ”, Masson, Paris, 1988.
- [Dautray 85] R. DAUTRAY, J.-L. LIONS – “ Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques », Vol 5, Masson, Paris 1985.
- [El Khoury 89] K. EL KHOURY – “ Formulation modale de problèmes de diffusion thermique avec transport ”, Thèse de Docteur en Energétique, Ecole des Mines de Paris, 12 Octobre 1989.
- [El Khoury 89-IJHMT] K. EL KHOURY, A. NEVEU – “Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques”, International journal of Heat and Mass Transfer, vol.32, n°2, p 213-226, 1989.
- [Flament 93] B. FLAMENT, F. BOURQUIN , A. NEVEU – “Synthèse modale:Une méthode de sous-structuration pour la modélisation de systèmes thermiques linéaires”, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 36 n°6, p.1649-1662, 1993.
- [Hirsch 97] F. HIRSCH, G. LACOMBE – “Eléments d'analyse fonctionnelle”, Col. Enseignement des Mathématiques, Masson, Paris, 1997.
- [Keldysh 51] M. V. KELDYSH – “Valeurs propres et fonctions propres de certaines classes d'équations non autoadjointes” (en Russe), Doklady Akademii Nauk, Vol. 77, No. 1, pp. 11-14, 1951.
- [Keldysh 71] M. V. KELDYSH – “On the completeness of eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators”, Russian Mathematical Surveys, Vol. 26, No. 4, 1971.
- [Krukovskii 76] N. M. KRUKOVSKII – “The m-tuple completeness of systems of generalized eigenfunctions and associated functions in W_2^1 of boundary value problems for elliptic equations and systems”, (*article traduit de*) Differential'nye Uraveniya, Vol. 12, No. 10, pp. 1842-1851, 1976.
- [Krukovskii 77] N. M. KRUKOVSKII – Letter to the Editor, (*article traduit de*) Differential'nye Uraveniya, Vol. 13, No. 7, pp. 1344, 1977.
- [Lascaux 87] P. LASCAUX, R. THEODOR, – “Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur ”, Masson, Paris, 1987.
- [Neveu 99-IJTS] A. NEVEU, K EL KHOURY, B. FLAMENT – “Simulation of non-steady-state conduction :expansion on the branch modes”, Int. J. Therm. Sci, N°38, p. 289-304, 1999.
- [Neveu 00-RFM] A. NEVEU, K EL KHOURY – “Réduction d'un modèle thermique non linéaire par modes de branche. Application à un câble chauffant”, Revue Française de Mécanique, N°2, p. 115-124, 2000.
- [Oulefki 93] A. OULEFKI, A. NEVEU – “Réduction par amalgame modal d'un modèle thermique”, Journal de Physique III , n°2, p.303-320, 1993.
- [Sainsaulieu 96] L. SAINSAULIEU – “Calcul scientifique”, Masson, Col. Enseignement des Mathématiques, Paris, 1996.
- [Schwartz 83] L. SCHWARTZ – “Méthodes mathématiques pour les sciences physiques”, 2nd ed., Hermann, Paris, 1983.

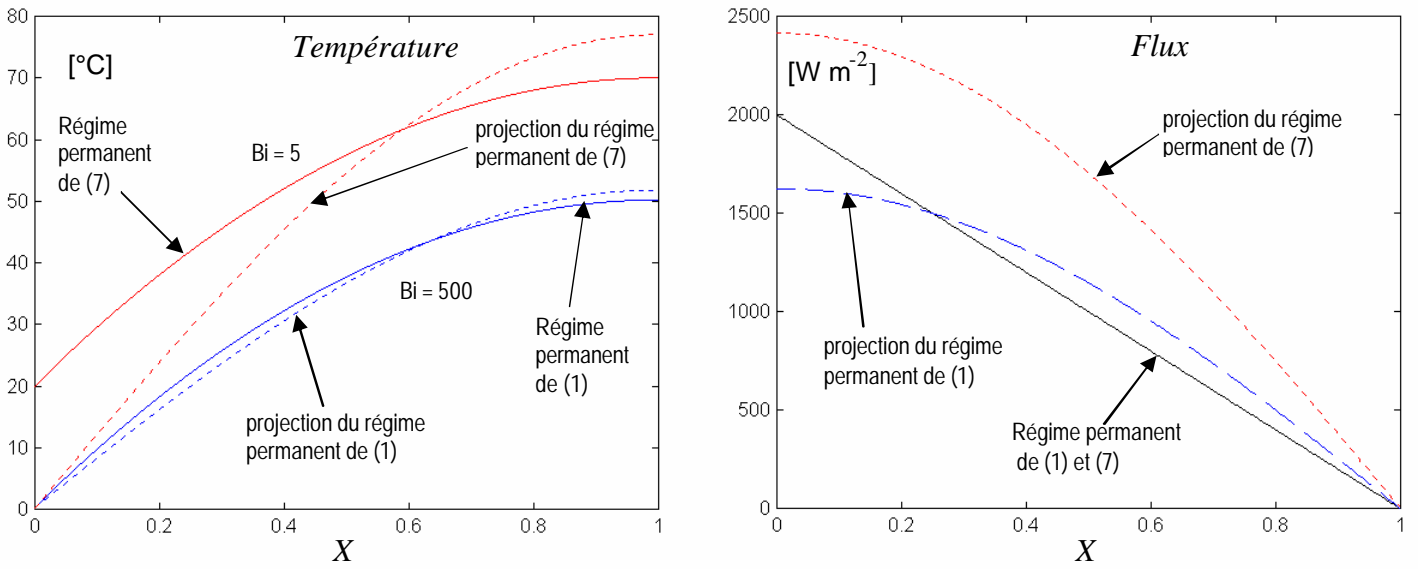


figure 1

Réduction du modèle au premier mode ($n = 1$). On a représenté la projection des régimes permanents des problèmes (1) et (7) sur le premier mode de la base de Fourier, définie par (3). Pour le problème (1) le nombre de Biot est égal à 500. C'est aussi celui qui est utilisé pour calculer la base de Fourier. On a choisi un nombre de Biot de 5 pour le problème (7). Les caractéristiques du système sont :

$$l_0 = 0,2 [m] \quad k_0 = 4 [W m^{-1} K^{-1}] \quad c_0 = 800\,000 [J m^{-3} K^{-1}] \quad w = 1000 [W m^{-3}]$$

La densité de puissance est constante. Le flux varie linéairement et la courbe est indépendante du nombre de Biot.

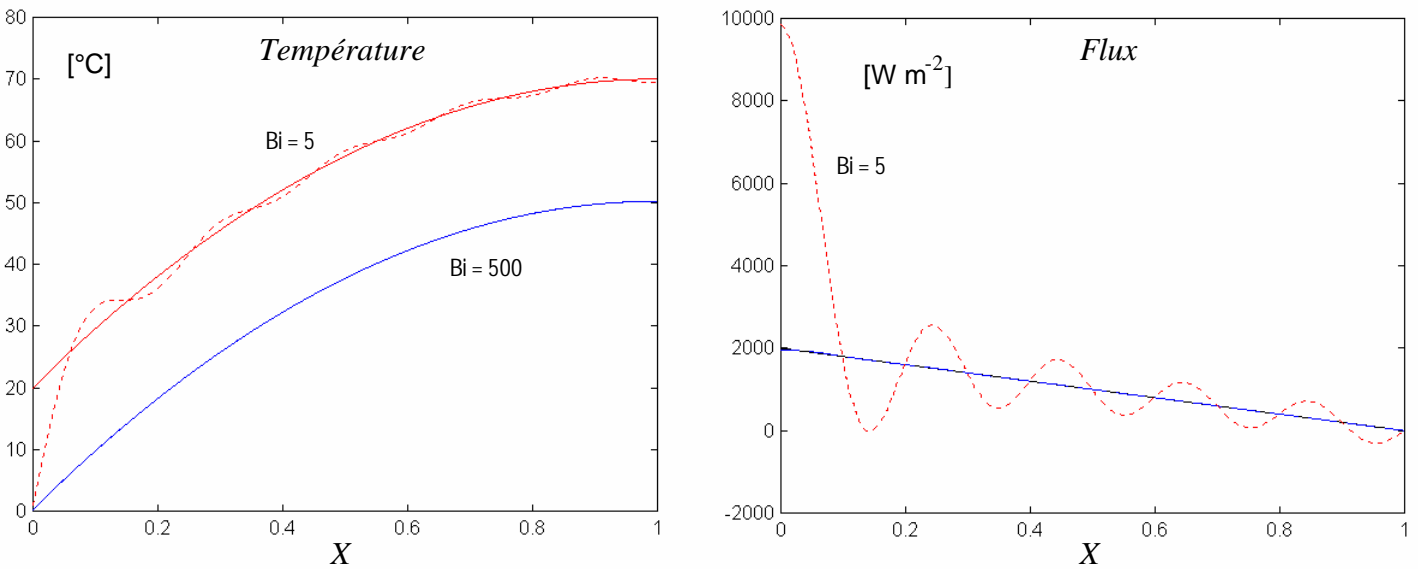
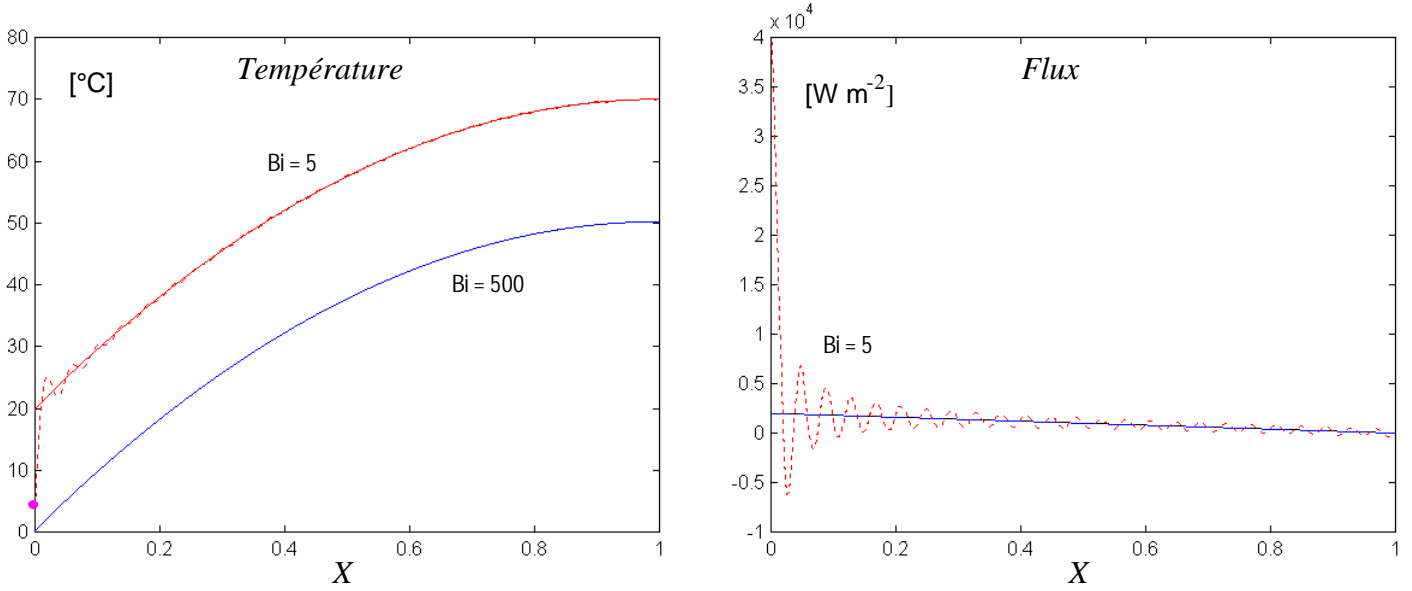
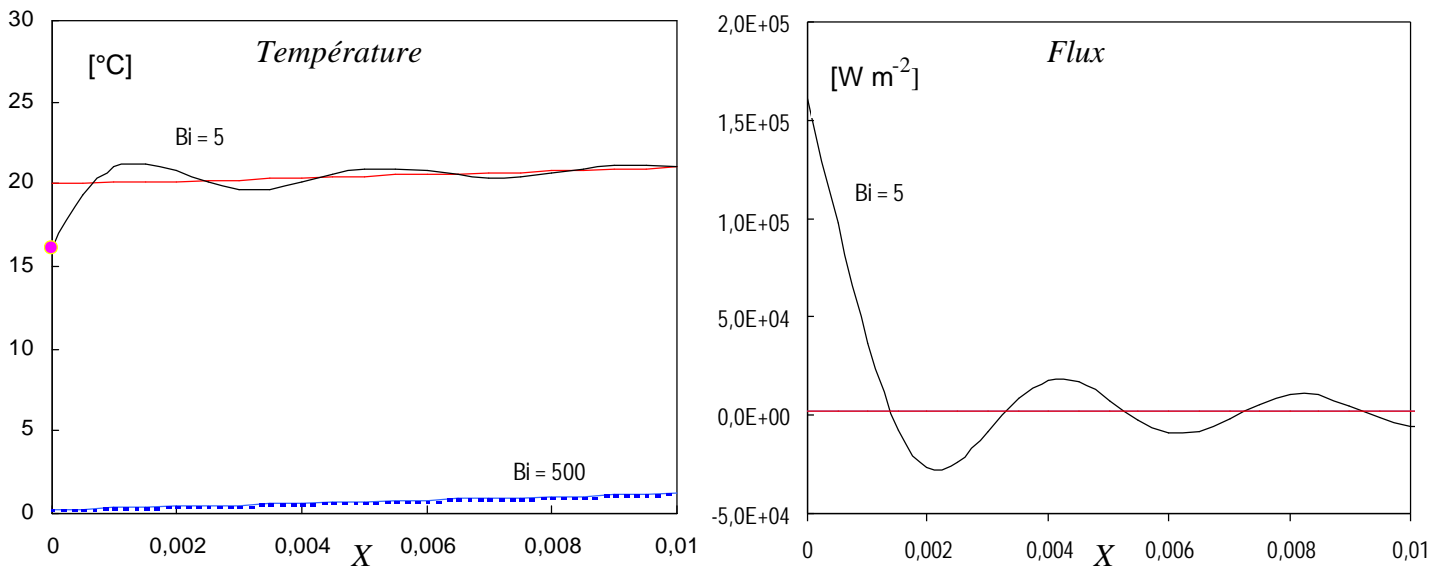


figure 2

Réduction du modèle ($n = 10$). La projection sur la base de Fourier limitée au dix premiers modes permet de très bien reconstituer le régime permanent de (1). Par contre le résultat est mauvais pour la décomposition du régime permanent de (7).



a- Réduction du modèle (n = 50).



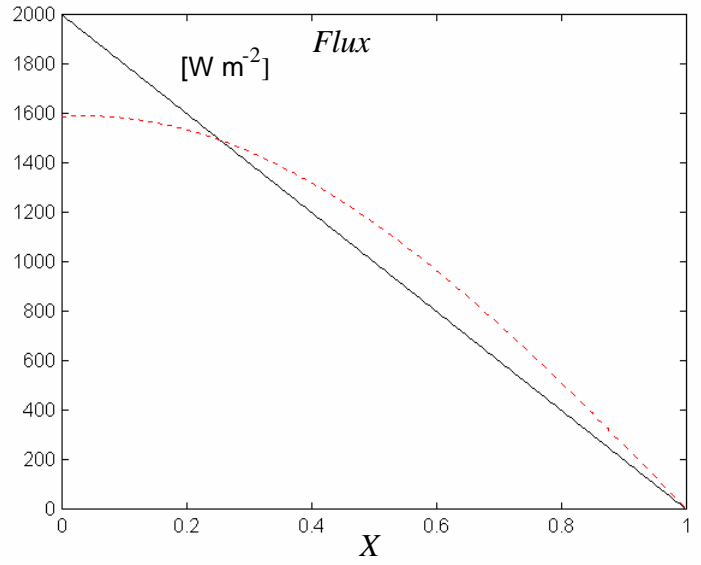
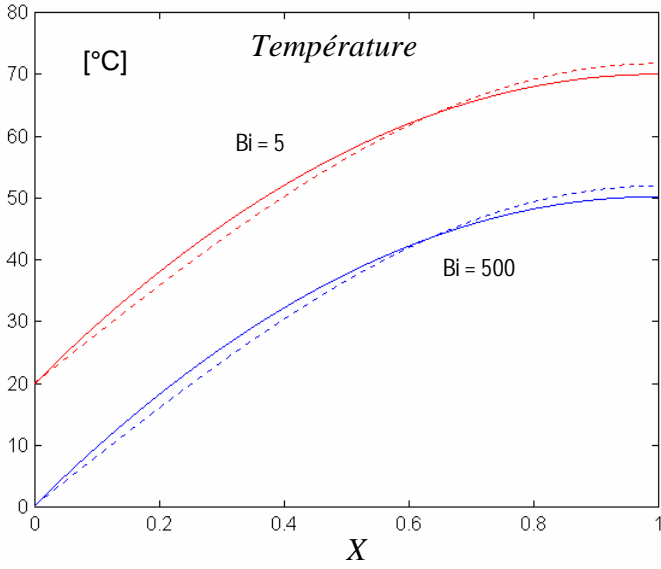
b- Réduction du modèle (n = 500).

Ici on a fait un zoom d'un facteur 100 sur X, près de la surface.

figures 3

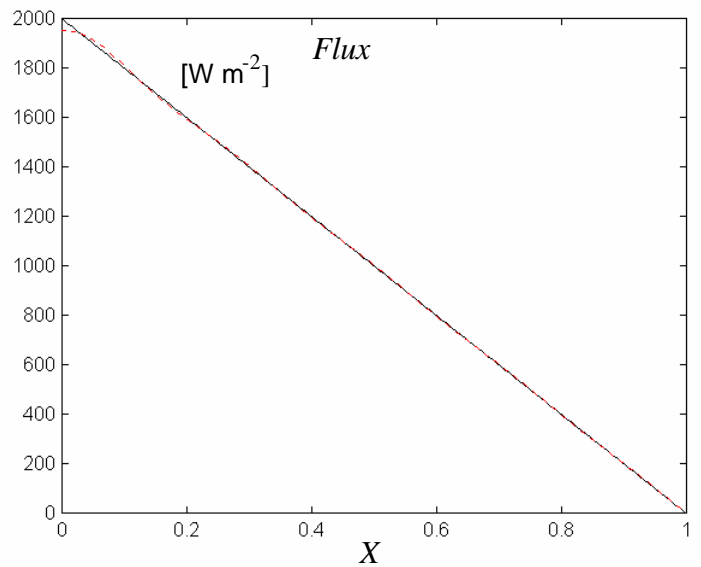
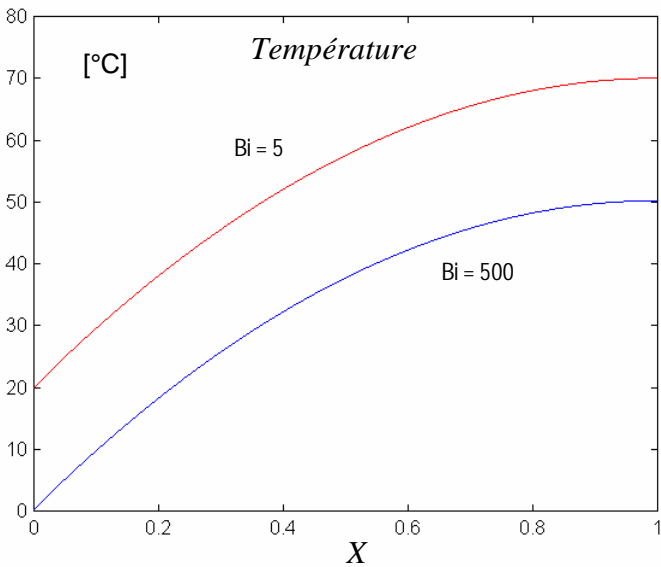
La projection du régime permanent solution de (7) ne converge pas pour le flux. La convergence est très lente pour la température. Lorsque n tend vers l'infini, la projection de la température tend vers le régime permanent, sauf dans une zone près du bord (oscillations). L'erreur pour le flux se concentre sur la surface. Le saut limite de flux au point X = 0 est :

$$dj = \frac{\nu l^2}{k} \left(\frac{B_i^o - B_i}{B_i} \right)$$



a- Réduction du modèle (n = 2).

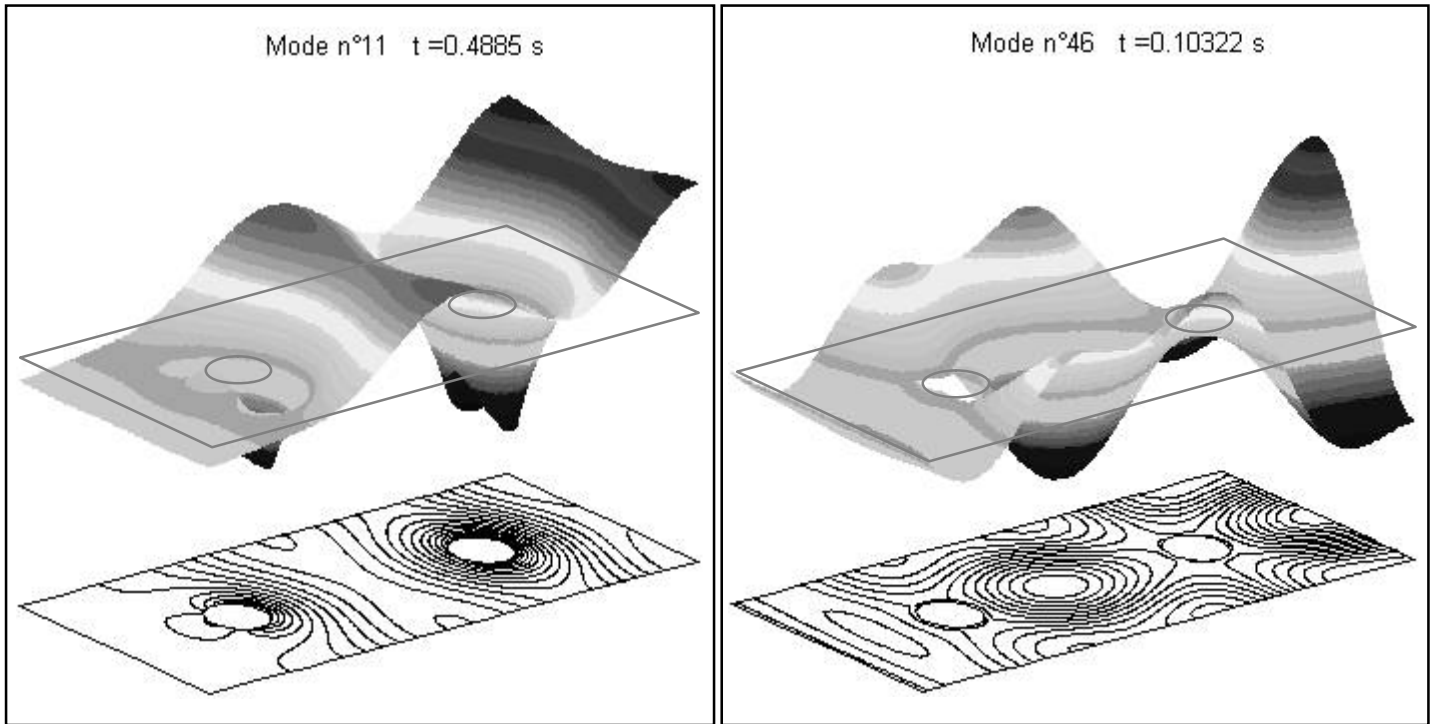
Pour la solution de (1), l'écart sur la courbe de flux entre modèle réduit et modèle exact n'est pas visible avec l'échelle retenue.



b- Réduction du modèle (n = 10).

figures 4

On a représenté la projection des régimes permanents des problèmes (1) et (7) sur la base de branche pour deux réductions (n=2 et n=10). Les projections sont proches des références. On n'observe plus d'incompatibilité des conditions limites. Cette fois la convergence est régulière. En conservant uniquement les dix premiers modes de branche on obtient d'excellents résultats, et ceci quel que soit le nombre de Biot. A delà de n=20 l'erreur est insignifiante dans le cadre d'une utilisation courante du modèle.

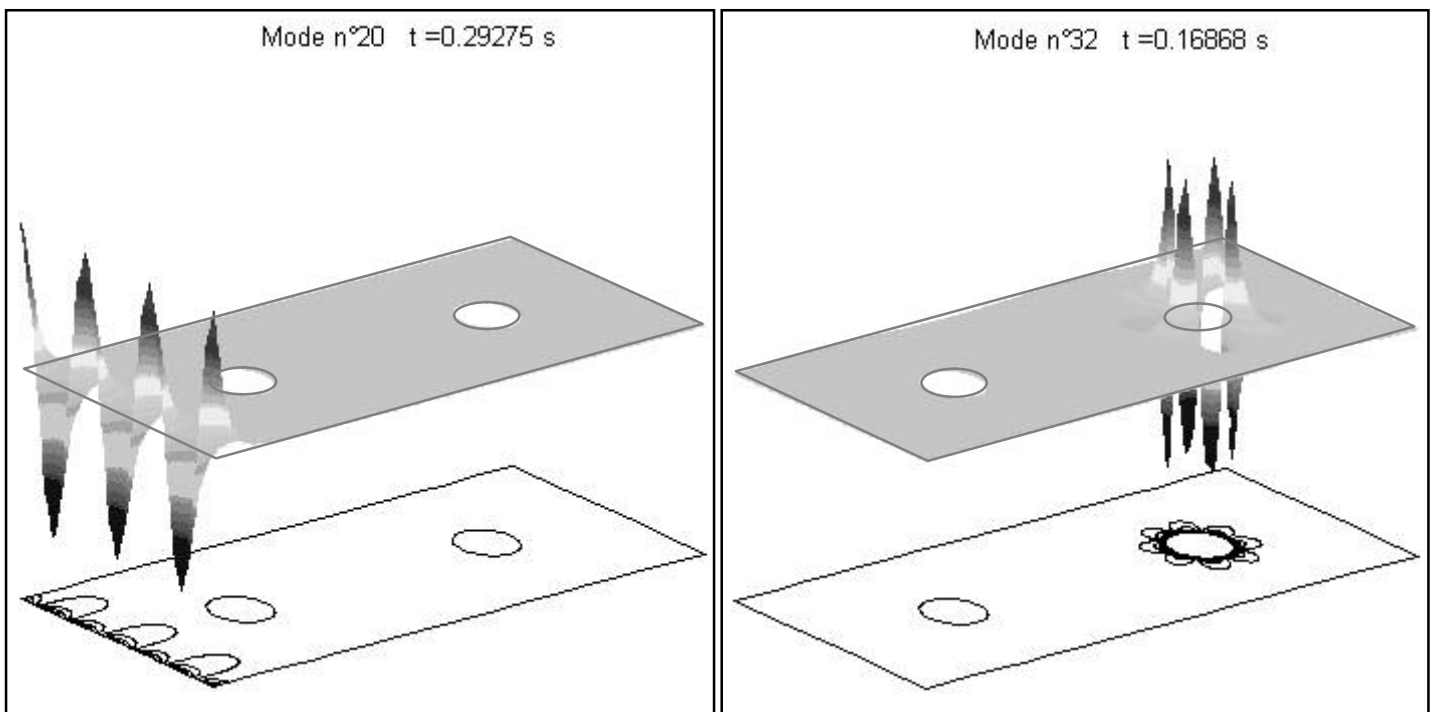


a- mode global.

Le mode 11 n'est pas localisé dans une région bien particulière.

b- mode volumique.

Ce type de mode, ici le n° 46, est quasi nul sur les frontières où la condition de Steklov est imposée.



c- mode surfacique (frontière extérieure).

Le mode 20 est localisé sur la frontière extérieure du domaine.

d- mode surfacique (frontière interne).

Le mode 32 est localisé sur une frontière interne. Notons que le mode 34, dont la constante de temps est proche, est localisé sur l'autre orifice

figures 5

Modes de branche d'une plaque rectangulaire. Classement selon la localisation spatiale du mode. Pour chaque mode on a représenté une vue en élévation ainsi que les iso-valeurs. Le contour en trait fin au niveau du mode repère sa valeur 0. L'échelle verticale est adimensionnée pour le tracé [-1, +1]

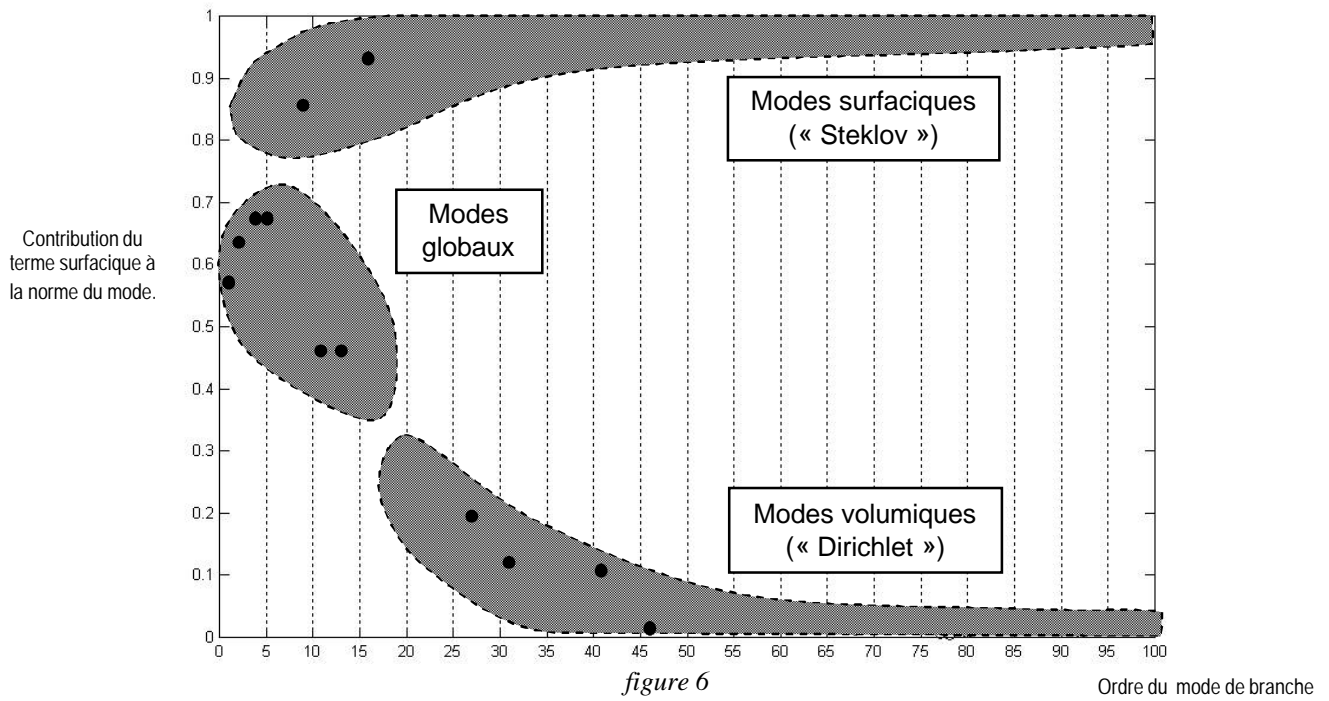
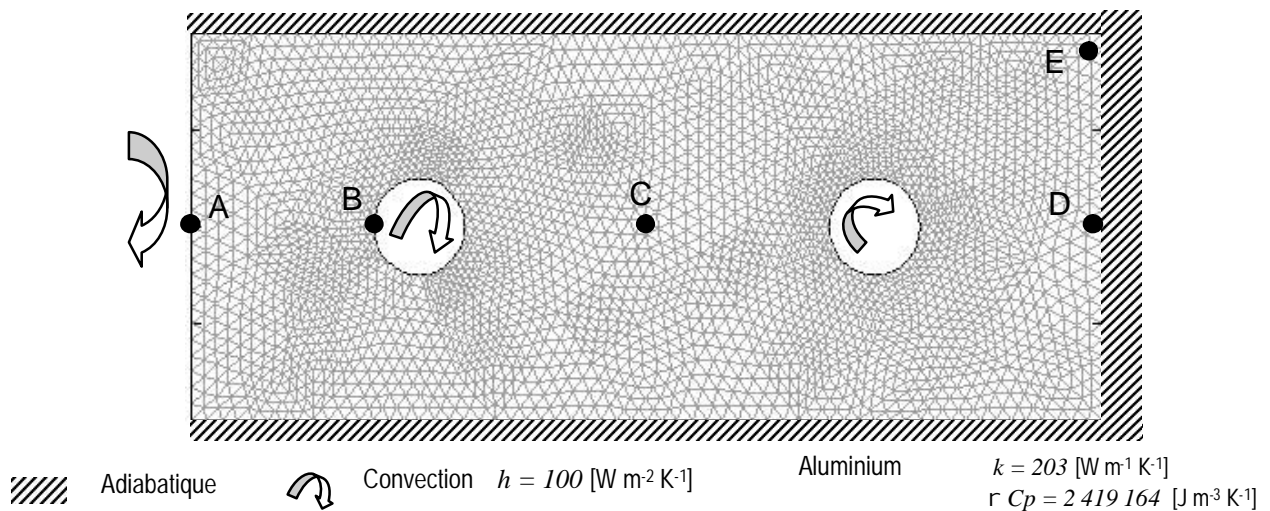


figure 6



figures 7.

Géométrie et conditions aux limites pour la solidification.

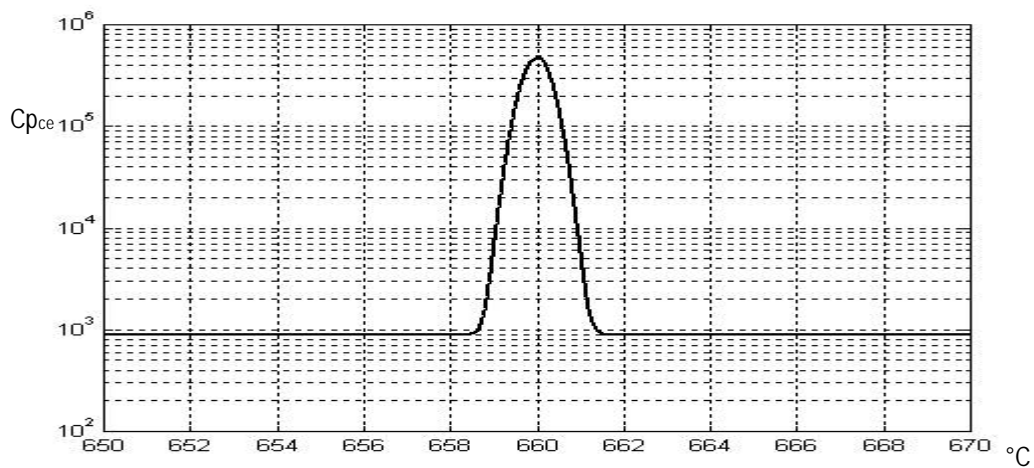


figure 8.

Variation de la capacité calorifique en fonction de la température. L'intégrale du pic est égal à la chaleur latente de solidification $L = 397\,000 \text{ [J m}^{-3}]$. La largeur du pic est faible, ce qui schématise dans une certaine mesure un cas proche de celui d'un corps pur.

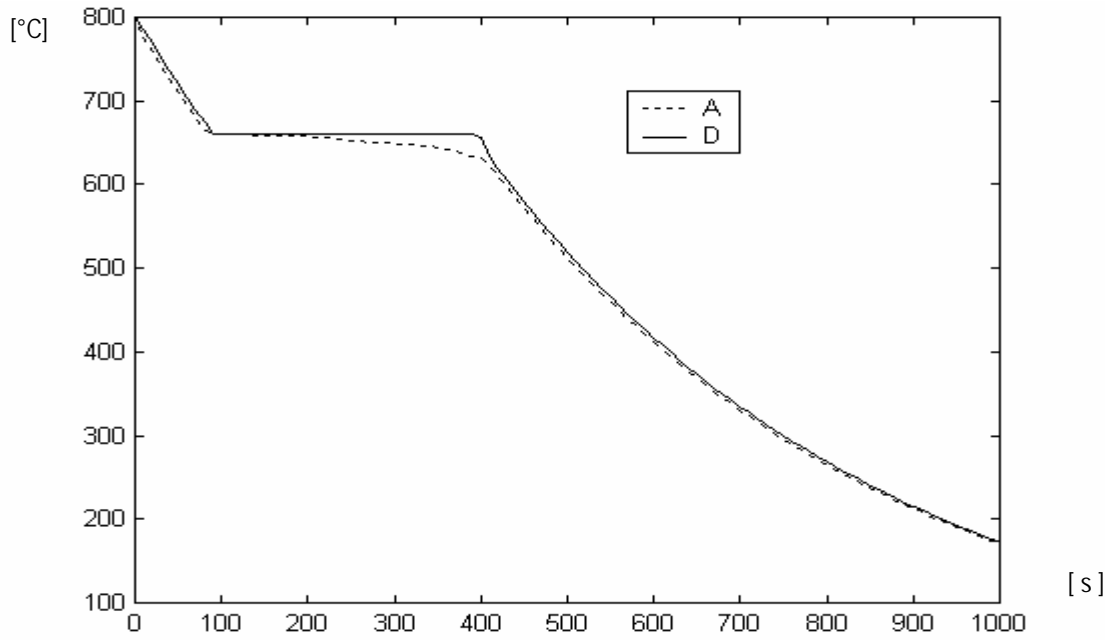


figure 9

Refroidissement de la plaque. Evolution de la température en fonction du temps aux points A et D.

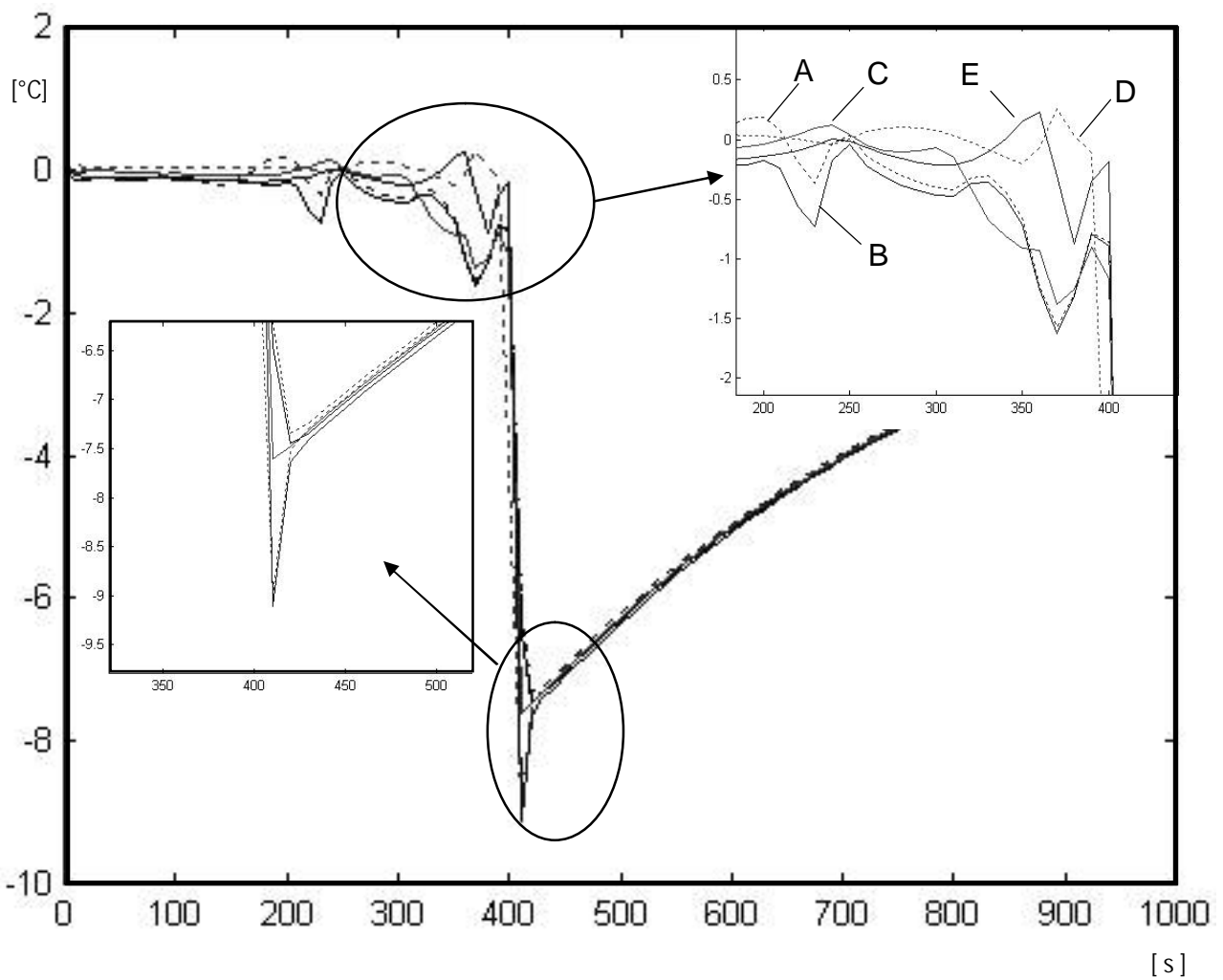


figure 10

Evolution temporelle de l'erreur absolue. Températures aux points A, B, C, D et E. Ecart entre la solution de référence calculée avec le logiciel FemLab (éléments finis), et le modèle modal réduit à 13 modes {1, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 27, 31, 41, 46}. L'erreur relative reste inférieure à 2%.