

# **Résolution d'un problème inverse par utilisation d'un modèle réduit modal**

## **Application au frottement d'un pion sur un disque en rotation**

**Olivier QUEMENER\*, Jean-Luc BATTAGLIA \*\*, Alain NEVEU\***

\* Centre d'Energétique et de Mécanique d'Ile de France (CEMIF)

Université d'Evry, IUP Le Pelvoux, 91000 Evry

Tel : (33) – 01 69 47 79 35

Fax : (33) – 01 69 47 79 47

E-mail : O.Quemener@iut.univ-evry.fr

\*\* Laboratoire Energétique et Phénomènes de Transfert (LEPT)

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Esplanade des Arts et Métiers, 33 405 Talence Cedex

Tel : (33) – 05 56 84 54 21

Fax : (33) – 05 56 84 54 00

E-mail : jlb@lept-ensam.u-bordeaux.fr

## Résumé

La méthode présentée permet de résoudre rapidement un problème inverse de diffusion-transport de la chaleur dans des systèmes à frontières fixes, et dont le modèle de comportement fait intervenir de grandes dimensions. Pour cela, le modèle de comportement initial est décomposé sur une base modale, qui est elle-même réduite par simple troncature, pour ne garder que les modes propres ayant une influence significative sur le problème inverse.

La résolution du problème inverse utilise la méthode des pas de temps futurs adapté au modèle réduit. On montre que le choix de nombre de modes propres que l'on garde dans le modèle réduit est directement lié au temps de diffusion entre le point de mesure et la frontière de la source à identifier. On montre ainsi que pour un ordre de réduction correctement choisi, cette réduction n'entraîne pas de dérégularisation par rapport au problème complet.

L'illustration de cette méthode s'effectue pour le cas de l'identification des flux dissipés par le frottement d'un pion fixe sur la périphérie d'un disque en rotation, en direction du pion et du disque. La mesure délicate des températures sur le disque en mouvement s'effectue à l'aide d'une caméra infrarouge, dont on caractérise la résolution spatiale et thermique.

L'utilisation de cette méthode au cas expérimental traité permet ainsi d'obtenir en temps réel le flux reçu par le disque. Des mesures de puissance électrique consommée viennent valider les résultats obtenus.

Mots-clés : analyse modale, réduction de modèles, problèmes inverse, thermographie infrarouge

## Abstract

This study allows solving rapidly an inverse heat conduction problem containing a term of heat transport, for a system whose numerical compartment description leads large scale matrix using.

The resolution is based on the modal method, which permits to obtain the eigenmodes of the homogeneous problem, from the spatial discretisation of the domain. The idea is that out of the contribution of each mode, only a few modes play a determining role. A simple truncature is then done, allowing just keeping the significant eigenmodes. The choice of the keeping eigenmodes number is linked with the diffusion time defined between the temperature measurement points and the boundary that receives the flux to be identified. The inverse problem is resolved by the future time steps method, adapted to the reduce model.

As application, we determine the time evolution of the heat fluxes dissipated by the friction of a fixed pin on the periphery of a disk in rotation around its axis, and received by the disk and by the pin. Measurements in the disk in movement and in the pin are done by infrared camera.

In following the precedent criterion, which allows to obtain the optimal eigenmodes number, this reduction doesn't decrease the resolution of the inverse problem, and allows real time identification. Experimental measures permit the validation of the results.

Keywords: modal analysis, model reduction, inverse problem, infrared thermography

## Nomenclature

<b>A</b>	matrice d'échange
<b>A*</b>	matrice d'échange adjointe
<b>C</b>	matrice des capacités
<i>C<sub>p</sub></i>	chaleur spécifique (J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
<i>D</i>	diamètre (m)
<b>E</b>	matrice d'entrée
<i>e</i>	épaisseur du disque et du pion (m)
<b>E*</b>	matrice d'entrée adjointe
<i>Fo</i>	nombre de Fourier
<i>h</i>	coefficient d'échange (W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> )
<i>l</i>	largeur du pion (m)
<i>N</i>	dimension de la base modale calculée
<i>p</i>	nombre de sollicitations
<i>Pr</i>	nombre de Prandtl
<i>r</i>	rayon (m)
<i>Re</i>	nombre de Reynolds
<b>S</b>	matrice statique
<i>S</i>	surface (m <sup>2</sup> )
<b>T</b>	vecteur des températures aux nœuds du maillage
<i>t<sub>d</sub></i>	temps de diffusion (s)
<i>T(M,t)</i>	température au point M à l'instant t (K)
<b>T<sub>d</sub></b>	vecteur des composantes dynamiques aux nœuds du maillage
<b>T<sub>g</sub></b>	vecteur des composantes glissantes aux nœuds du maillage
<b>U</b>	vecteur des sollicitations

<b>V</b>	matrice des vecteurs propres
$V$	vitesse ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$V_i$	vecteur propre
<b>W</b>	matrice des vecteurs adjoints
$W_i$	vecteur propre adjoint
<b>X</b>	vecteur des états
<b>X*</b>	vecteur des états adjoints
$x_i$	état
$x_i^*$	état adjoint
$z_i$	valeur propre associée à $V_i$

### **Alphabet grec**

<b>F</b>	flux traversant la frontière en frottement (W)
<b>G</b>	matrice d'entrée du modèle modal
<b>G*</b>	matrice d'entrée du modèle modal adjoint
<b>L</b>	matrice diagonale des valeurs propres
<b>a</b>	diffusivité thermique ( $\text{m}^2.\text{s}$ )
<b>d</b>	symbole de kronecker
<b>j</b>	densité de flux ( $\text{W.m}^{-2}$ )
<b>l</b>	Conductivité thermique ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
<b>q</b>	modulation spatiale
<b>r</b>	masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$S_U$	écart type sur la densité de flux ( $\text{W.m}^{-2}$ )
$t_i$	constante de temps du i-ème mode propre (s)
<b>w</b>	vitesse angulaire ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

## 1. Introduction

Dans le domaine de la simulation de problèmes thermiques directs, la réduction de modèle apporte un gain de temps de calcul très significatif qui permet, entre autre, de réaliser rapidement une étude de sensibilité de la température en différents points du système étudié en fonction des sollicitations thermiques qui sont appliquées. Pour la réduction de type modale, deux approches ont été développées. Petit et al. [1, 2] identifie un modèle réduit sous la forme d'une représentation d'état dans une base de dimension  $M$  de vecteurs propres dominants  $V_i, 1 \leq i \leq M$ . Cette identification est basée sur la minimisation de la norme de l'écart entre la réponse du modèle complet de dimension  $N$  avec celle du modèle réduit de dimension  $M \ll N$ , en considérant des évolutions des sollicitations sous forme de fonctions d'Heaviside. La matrice d'état est diagonale et chaque élément de cette diagonale est une valeur propre  $z_i$  associée à  $V_i$ . Afin d'améliorer la reproductibilité du modèle réduit, l'identification est réalisée indépendamment pour chaque sollicitation [3]. L'approche préconisée par Bacot et al. [4] consiste à calculer la base modale complète  $\{z_i, V_i\}, 1 \leq i \leq N$ , puis à réduire sa dimension  $N$  selon un critère approprié. Ainsi le critère classique de Marshall [5] consiste à tronquer la base modale et à ne conserver que les  $M$  premiers modes propres classés par ordre décroissant des constantes de temps  $t_i = -1/z_i$ . Le biais introduit par cette méthode de réduction n'est pas trop important si on effectue correctement la partition du champ thermique en une partie dynamique, solution du problème thermique homogène (sollicitations nulles), et une partie glissante, solution du problème en régime permanent, et si d'autre part la constante de temps du dernier mode conservé est proche du pas de temps adopté pour la simulation. Une méthode de réduction plus performante, mais nécessitant plus de temps de calcul, consiste à amalgamer les modes jugés non-dominants sur les modes dominants. La méthode d'amalgame proposée par Litz [6] ne prend pas en

compte la séparation des régimes dynamique et glissant ainsi que l'orthogonalité des modes, ce qui conduit à une expression complexe et relativement coûteuse en temps de calcul des modes amalgamés. En bénéficiant de la séparation des régimes et de l'orthogonalité, Oulefki et Neveu [7] ont abouti à une expression simple des coefficients d'amalgame.

Initialement développé pour la réduction de problèmes de conduction de la chaleur, le formalisme modal a ensuite été appliqué aux problèmes mettant en jeu un terme de transport, caractérisé par un vecteur vitesse en chaque point du système étudié. El Khoury et Neveu [8] ont montré que dans cette configuration, les modes propres sont à valeurs dans l'ensemble des complexes et ont adapté la méthode de réduction par amalgame à cette configuration. Notons que la méthode de troncature garde ici un sens mais que les constantes de temps des modes sont définies par  $t_i = -1/\text{Re}(z_i)$ .

Plus récemment est apparu l'intérêt d'utiliser un modèle réduit dans la procédure de résolution du problème thermique inverse. Ce problème consiste à estimer les évolutions spatio-temporelles des sollicitations à partir de mesures de température en des points situés au voisinage des surfaces sur lesquelles sont appliquées ces sollicitations. Les méthodes séquentielles de résolution du problème inverse, telles que celles proposées par Beck et al. [9], font appel à la simulation du modèle direct à chaque itération. Il est donc apparu évident qu'un gain de temps de calcul important pouvait être réalisé en utilisant un modèle réduit du modèle de comportement direct dans cette procédure séquentielle. Petit et Peruzzi [10] utilisent un modèle réduit identifié pour identifier une sollicitation thermique dans un problème de conduction de la chaleur. Videcoq et Petit [11] généralisent cette approche aux problèmes de conduction inverses comportant plusieurs sollicitations. Girault et al. [12] utilisent la même approche dans un problème 2D mettant en jeu un écoulement de fluide entre deux plaques. Battaglia et Neveu [13]

utilisent un modèle réduit amalgamé décrivant le transfert de chaleur dans une pièce en rotation et un outil lors d'une opération d'usinage par tournage afin d'estimer le flux de chaleur dégagé dans la zone de coupe.

Récemment, Battaglia [14] a montré, au travers de problèmes de conduction 1D et 2D, que l'on obtenait un modèle réduit bien adapté à la résolution du problème inverse en ne conservant que les modes dont les constantes de temps sont supérieures ou égales au temps de diffusion  $t_d$  de la chaleur de la surface d'application de la sollicitation jusqu'au capteur le plus proche. En effet, une variation de la sollicitation ne sera perçue au niveau du capteur qu'à partir de ce moment, ce qui implique que la fonction de sensibilité de la température au point de mesure vis à vis de la sollicitation que l'on veut estimer est nulle de 0 à  $t_d$ . Or, la contribution de chaque mode dans la solution de l'équation d'état modal, issue de la partition du champ thermique et de la décomposition de la composante dynamique sur les modes propres, est fonction de sa constante de temps  $t$ . Ce résultat revient donc à appliquer une troncature de type Marshall en spécifiant que la dernière constante de temps retenue soit égale à  $t_d$ . Connaissant la diffusivité thermique  $a$  du matériau dans lequel diffuse la chaleur, on obtient une bonne évaluation du temps de diffusion à partir de la relation  $t_d \approx e^2/a$ , où  $e$  est la distance entre le capteur et la surface d'application de la sollicitation. Lorsque plusieurs capteurs localisés à des distances différentes sont utilisés, les modes conservés dans le modèle réduit optimal ont des constantes de temps comprises entre le temps de diffusion minimal, pour le capteur le plus proche, et maximal pour le capteur le plus éloigné.

Etant donné qu'il n'est pas nécessaire de calculer tous les modes, la méthode de calcul des valeurs propres et des vecteurs propres est basée sur la technique d'Arnoldi qui est une adaptation de la méthode de Lanczos aux matrices non Hermitiennes. Cette méthode développée par Arnoldi [15] en 1951 a été améliorée par différents auteurs.



Notamment, Lehoucq et Sorenson [16] proposent une méthode de déflation permettant de calculer les modes dont les valeurs propres sont comprises dans un intervalle particulier. Radke [17] utilise une technique d'accélération de la convergence de l'algorithme de recherche des modes basée sur les polynômes de Chebyshev. Nous donnons en annexe 1 le principe général de la méthode d'Arnoldi.

Un problème délicat consiste à évaluer l'influence de la réduction du modèle sur la régularisation du problème inverse. Tikhonov et Arsenin [18] ont en effet montré l'importance de la régularisation du problème inverse en regard des erreurs sur les mesures réalisées dans le système et leurs effets sur la non-unicité de la solution. Les résultats obtenus dans des configurations simples de transferts 1D par conduction [14] montrent que la réduction modale est sans effet sur la régularisation du problème inverse.

La présentation de l'article est comme suit. Dans un premier temps, nous rappelons le principe de partition du champ thermique basée sur la linéarité du système et la décomposition du champ dynamique sur la base des modes propres de l'opérateur de la chaleur par diffusion-transport. Nous présentons ensuite une application de la méthode de recherche de modèles réduits optimaux pour la résolution d'un problème inverse. Cette application porte sur le problème du frottement d'un pion fixe en bronze à la périphérie d'un disque d'acier en rotation autour de son axe. Les caractéristiques thermophysiques des matériaux constitutifs des deux solides sont connues mais la solution de ce problème, étudié entre autre par Laraqui [19] en régime permanent, est très sensible à la résistance thermique de contact glissant entre les deux solides. La discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles établies pour chaque solide est réalisée à partir de la méthode des éléments finis. Une étude de sensibilité de la température calculée sur le disque en fonction du maillage est réalisée. Elle montre la nécessité d'utiliser un pas de discrétisation spatiale très petit au voisinage de la zone de frottement, ce qui conduit à

une dimension de la base modale complète de l'ordre de 4000 pour le disque et de l'ordre de 460 pour le pion. Nous recherchons ensuite l'ordre de réduction optimal pour le disque puis le pion en vue de l'estimation des flux de chaleur dans ces deux solides, à l'interface de contact. La résolution de ces deux problèmes inverses utilise des mesures de températures au voisinage de la zone de frottement entre le pion et le disque, à l'aide d'une caméra infrarouge. En fonction de la position de ces points de mesure on trouve que l'ordre optimal du modèle réduit est égal à 8 pour le disque, et égal à 16 pour le pion. Dans chaque cas on retrouve le critère de réduction optimal énoncé par Battaglia [14]. Une validation indirecte des flux estimés est effectuée par la comparaison des niveaux de température calculés et mesurés en des points n'ayant pas servi à l'estimation. Une comparaison directe est ensuite effectuée par mesure de la puissance électrique efficace fournie pour vaincre les frottements et comparée à la somme des flux estimés.

## 2. Décomposition modale de l'opérateur de diffusion-transport de la chaleur

Nous considérons un système (domaine  $\Omega$ , frontière  $\partial\Omega$ , la normale sortante à  $\partial\Omega$  est notée  $n$ ) dans lequel les transferts de chaleur s'opèrent par diffusion et transport et où toutes les conditions aux limites et initiale sont connues. On désigne par  $\mathbf{v}(P)$  le vecteur vitesse au point  $P$ . Nous supposons d'autre part que les paramètres thermophysiques sont indépendants de la température et du temps, le système est donc linéaire et invariant. S'il n'existe pas de termes sources de chaleur au sein du domaine, les équations mathématiques décrivant le transfert de chaleur dans le système sont :

$$r C_p(P) \frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = A[T(P,t)], P \in \Omega, t > 0 \quad (1)$$

$$E[T(P,t)] = u(P,t), P \in \partial\Omega, t > 0 \quad (2)$$

$$T(P,t) = T_0(P), P \in (\Omega \cup \partial\Omega), t = 0 \quad (3)$$

$A[T(M,t)]$  est l'opérateur du transfert de la chaleur défini par :

$$A[T(P,t)] = \rho(P) \Delta T(P,t) - \rho C_p(P) \mathbf{v}(P) \cdot \nabla T(P,t) \quad (4a)$$

L'opérateur des conditions aux limites est du type :

$$E[T(P,t)] = \rho(P) \nabla T(P,t) \cdot \mathbf{n} + h(P) (T(P,t) - T_\infty) \quad (4b)$$

En utilisant une méthode de discrétisation spatiale de type éléments finis comportant  $N$  nœuds, le système d'équations aux dérivées partielles (1) (3) à (3) devient un système de  $N$  équations différentielles en temps qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{T}(t) + \mathbf{E} \mathbf{U}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0 \quad (6)$$

où  $\mathbf{C}$  ( $N \times N$ ) est la matrice de capacité thermique,  $\mathbf{A}$  ( $N \times N$ ) est la matrice d'échange,  $\mathbf{E}$  ( $N \times p$ ) est la matrice d'entrée,  $\mathbf{U}$  ( $p \times 1$ ) est le vecteur des sollicitations, et  $\mathbf{T}$  ( $N \times 1$ ) est le vecteur des températures en chaque nœud.

De par l'existence du terme de transport, le système n'est pas réciproque : une inversion du gradient de température ne conduit pas à une inversion du flux. L'opérateur de la chaleur  $A[T(P,t)]$  n'est donc pas auto-adjoint. La matrice adjointe  $\mathbf{A}^*$  est obtenue en inversant le signe de la vitesse, ce qui équivaut, pour une matrice  $\mathbf{A}$  composée de coefficients réels, à :

$$\mathbf{A}^* = -{}^T \mathbf{A} \quad (7)$$

La linéarité autorise la séparation du champ thermique  $\mathbf{T}(t)$  en une partie glissante  $\mathbf{T}_g(t)$  et une partie dynamique  $\mathbf{T}_d(t)$  :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_d(t) + \mathbf{T}_g(t) \quad (8)$$

Le champ glissant  $\mathbf{T}_g(t)$  est solution du problème en régime permanent :

$$\mathbf{A} \mathbf{T}_g(t) + \mathbf{E} \mathbf{U}(t) = 0 \quad (9)$$

d'où :

$$\mathbf{T}_g(t) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{U}(t) = \mathbf{S} \mathbf{U}(t) \quad (10)$$

Le champ dynamique  $\mathbf{T}_d(t)$ , solution du problème homogène, se décompose sur la base des vecteurs propres  $V_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , qui sont solutions du problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{A} V_i = z_i \mathbf{C} V_i \quad (11)$$

où  $z_i$  est la valeur propre associée à  $V_i$ .

La composante dynamique s'exprime alors comme :

$$\mathbf{T}_d(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) V_i(P) = \mathbf{V} \mathbf{X}(t) \quad (12)$$

De la même façon, on obtient les vecteurs propres  $W_i$  du problème adjoint, en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{A}^T W_i = z_i^* \mathbf{C} W_i \quad (13)$$

Les vecteurs propres  $V_i$  et  $W_i$  sont orthogonaux relativement à la matrice des capacités  $\mathbf{C}$  :

$$V_i \mathbf{C} W_i = d_{i,j} \quad (14)$$

Cette propriété est exploitée pour normer les vecteurs propres.

En introduisant les relations (8) (10) (12) et (14) dans la relation (5), on obtient l'équation d'évolution du vecteur des états  $\mathbf{X}(t)$  :

$$\frac{d \mathbf{X}(t)}{dt} = \bullet \mathbf{X}(t) + \bullet \frac{d \mathbf{U}(t)}{dt} \quad (15)$$

La matrice  $\mathbf{\Lambda}$  est diagonale et constituée des  $N$  valeurs propres  $z_i$ , qui sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  :  $z_i = -1/\tau_i + j\omega_i$ , où  $\tau_i$  est la constante de temps du mode propre et  $\omega_i$  la pulsation propre.

La matrice  $\mathbf{\Lambda}$  est définie par :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E} \quad (16)$$

Etant donné que la température en chaque nœud est à valeur réelle, à chaque mode complexe correspond son conjugué dans la base modale. En résolvant l'équation d'état (15) et en utilisant les relations (10) et (12) on obtient la valeur du champ des températures dans tout le système :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{V} \mathbf{X}(t) + \mathbf{S} \mathbf{U}(t) \quad (17)$$

### 3. Réduction modale optimale pour la résolution du problème thermique inverse.

En supposant qu'une seule sollicitation  $u(t)$  agisse sur le système, la solution de l'équation d'état modale (15) est :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{\Lambda} t} \mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{\Lambda}(t-q)} \frac{d\mathbf{u}(q)}{dq} dq \quad (18)$$

En particulier, la solution pour  $u(t) = u_0$  est :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{\Lambda} t} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U} u_0 \quad (19)$$

et donc, d'après la relation (17), l'expression de la température en tout point au cours du temps est :

$$\mathbf{T}(t) = (\mathbf{V} e^{\mathbf{\Lambda} t} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U} + \mathbf{S}) u_0 \quad (20)$$

Le vecteur sensibilité du champ thermique vis à vis de la sollicitation  $u_0$  est donc définie par :

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d\mathbf{T}(t)}{du_0} = \mathbf{V} e^{-t/\tau} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{S} = \dot{\mathbf{u}}_d(t) + \mathbf{S} \quad (21)$$

où  $\mathbf{S}$  et  $\dot{\mathbf{u}}$  sont ici des vecteurs puisqu'il n'y a qu'une seule composante  $u_0$ .

Le terme exponentiel dans l'expression de la sensibilité dynamique  $\dot{\mathbf{u}}_d(t)$  montre que l'influence du mode  $i$  sur  $\dot{\mathbf{u}}_d(t)$  diminue très rapidement lorsque  $t > \tau_i$ . D'autre part, cette sensibilité dépend aussi du poids de chaque mode défini par  $p_i = V_i \Gamma_i$ .

Supposons qu'un capteur de température soit disposé dans le système à une distance  $e$  de la surface d'application de la sollicitation  $u_0$ . Un changement brusque de  $u_0$  à l'instant  $t_0$  sera perçu par le capteur à l'instant  $(t_0 + t_d)$ , où  $t_d$  représente le temps de diffusion de la chaleur depuis la surface sollicitée jusqu'au point de mesure. En première approximation, le temps  $t_d$  peut être évalué à partir du rapport  $e^2/a$ , où  $a$  est la diffusivité thermique du matériau dans le domaine de mesure.

La sensibilité de la température au point de mesure vis à vis de  $u_0$  est donc nulle de 0 à  $t_d$ . La procédure d'inversion fait ici appel au modèle direct exprimé dans la base modale. On en déduit donc, d'après la relation (21) et l'analyse qui en découle, que tous les modes dont la constante de temps est inférieure à  $t_d$  n'ont aucune contribution sur la résolution du problème inverse. On peut donc réaliser une troncature de la base modale adaptée à la résolution du problème thermique inverse, telle que les constantes de temps des modes conservés vérifient l'inégalité :

$$\tau_i \geq t_d, \quad 1 \leq i \leq M \quad (22)$$

Une conséquence directe est que plus le capteur sera éloigné de la surface d'application de la sollicitation et plus le nombre de modes éliminés sera grand, et inversement.

La réduction modale optimale pour la résolution du problème de conduction inverse s'apparente donc à une réduction de type Marshall. Ayant une connaissance approchée de la valeur de  $t_d$ , on peut donc ne calculer que les modes vérifiant l'inégalité (22) en utilisant une méthode de calcul par sous-espace basée sur la recherche des éléments de Ritz dans le problème de Galerkin. Pour les matrices non Hermitiennes, c'est la méthode d'Arnoldi qui est utilisée et que nous détaillons brièvement en annexe 1. Comme le nombre de modes retenus est généralement petit devant la dimension de la base modale complète (sauf dans le cas de mesure en surface par thermographie où la limitation sera fixée en fonction de la période d'échantillonnage des mesures), le calcul des éléments propres du modèle réduit est rapide et nécessite peu de ressource en termes de stockage mémoire.

## 4. Application de la méthode

### 4.1 Description du système

Un disque, de diamètre  $D = 204$  mm et d'épaisseur  $e = 8$  mm, tourne en rotation autour de son axe à vitesse angulaire fixe  $w = 320$  tr mn<sup>-1</sup> (*figure 1*). Ce disque est en acier (masse volumique  $\rho = 7800$  kg m<sup>-3</sup>, capacité thermique  $C_p = 470$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>, conductivité thermique  $\lambda = 22$  W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>). Un pion fixe parallélépipédique, d'épaisseur  $e = 8$  mm et de largeur  $l = 30$  mm, frotte sur la périphérie du disque. Ce pion est chanfreiné et son rayon de courbure est égal au rayon du disque. La longueur du contact disque - pion est  $L = 25$  mm. Ce pion est en bronze (masse volumique  $\rho = 8665$  kg m<sup>-3</sup>, capacité thermique  $C_p = 343$  J kg<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>, conductivité thermique  $\lambda = 26$  W m<sup>-1</sup> K<sup>-1</sup>). Le frottement génère un terme source de chaleur à l'interface dont sont issus les flux de chaleur dans le disque  $j_d(t)$  et dans le pion  $j_p(t)$ .

## 4.2 Equations mathématiques décrivant le transfert de chaleur dans le disque et le pion

Nous faisons l'hypothèse d'accommodation thermique dans l'épaisseur du disque, ce qui équivaut à  $Bi = \frac{\bar{h}_{d1} \cdot e}{2 \cdot l} \ll 1$ , où  $\bar{h}_{d1} = \frac{1}{S} \int_0^R h_{d1}(P) dS$  est le coefficient d'échange moyen sur les surfaces latérales du disque, qui sera évalué par la suite. Les transferts de chaleur par conduction et transport dans le disque sont décrits par les relations mathématiques suivantes :

$$\left[ r C_p \right]_d \frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = l_d \text{D}_{x,y} T(P,t) - \left[ r C_p \right]_d w \left( x \frac{\partial T(P,t)}{\partial y} - y \frac{\partial T(P,t)}{\partial x} \right) + \frac{h_{d1}(P)}{2e} (T(P,t) - T_\infty), \quad P \in W_D, t > 0 \quad (23)$$

$$-l_d \nabla T(P,t) \cdot \mathbf{n} = h_{d2}(P) (T(P,t) - T_\infty), \quad P \in \Gamma_2, t > 0 \quad (24)$$

$$-l_d \nabla T(P,t) \cdot \mathbf{n} = j_d(t), \quad P \in \Gamma_1, t > 0 \quad (25)$$

$$T(P,t) = T_\infty, \quad P \in (\Omega_D \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2), t = 0 \quad (26)$$

$\mathbf{n}$  est la normale sortante à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . En faisant la même hypothèse d'accommodation dans l'épaisseur du pion (validée par la suite à partir de la valeur du coefficient d'échange global), les transferts de chaleur par conduction dans le pion sont décrits par les relations mathématiques suivantes :

$$\left[ r C_p \right]_p \frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = l_p \text{D}_{x,y} T(P,t) + \frac{h_p(P)}{2e} (T(P,t) - T_\infty), \quad P \in \Omega_p, t > 0 \quad (27)$$

$$-l_p \nabla T(P,t) \cdot \mathbf{n} = j_p(t), \quad P \in \Gamma_1, t > 0 \quad (28)$$

$$-l_p \nabla T(P,t) \cdot \mathbf{n} = h_p(P) (T(P,t) - T_\infty), \quad P \in G_3, t > 0 \quad (29)$$

$$T(P,t) = T_\infty, \quad P \in (W_p \cup G_1 \cup G_3), t = 0 \quad (30)$$



### 4.3 Détermination des coefficients d'échange

Pour résoudre le système d'équations (23) à (26), il est nécessaire d'estimer le coefficient d'échange sur la surface et à la périphérie du disque, en dehors de la zone de contact avec le pion. Wagner [20] et Cobb et Saunders [21] donnent une corrélation liant le coefficient d'échange moyen  $\bar{h}_{cvl}$  à la surface latérale d'un disque à sa vitesse de rotation  $\omega$  sous la forme :

$$\bar{Nu}_R = \frac{\bar{h}_{cvl} R}{\Gamma} = C \left[ \frac{\omega D_2}{4\eta} \right]^{0,5} \quad (31)$$

$$\text{soit} \quad \bar{h}_{cvl} = 2 \cdot C \cdot \left[ \frac{\omega}{4\eta} \right]^{0,5} \quad (32)$$

où  $C = 0,335$  lorsque le nombre de Prandtl est  $Pr = 0,74$ . Cette relation implique alors un coefficient moyen indépendant de la taille du disque, soit donc un coefficient local constant en fonction du rayon. On peut alors écrire :

$$h_{cvl} = \bar{h}_{cvl} = 12,9 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1} \quad (33)$$

A ce terme est ajouté le coefficient linéarisé de rayonnement, qui est calculé pour une émissivité moyenne  $e = 0,9$ , une température extérieure  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  et une température du disque  $T_d$  qui évolue de 20 à 50°C. On obtient alors un coefficient  $h_r$  qui varie de 0 à 6  $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . On obtient finalement :  $h_{dl} = h_{cvl} + h_r$  compris entre 12,9 et 18,9  $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ .

Parallèlement à cette estimation, on détermine expérimentalement un coefficient moyen de convection par mesure de la température de paroi du disque chauffé uniformément et en cours de refroidissement de 100 à 20 °C par caméra Infrarouge. L'utilisation de ces mesures avec un simple modèle de bilan thermique permet alors l'obtention d'une valeur de coefficient global de transferts convectif et rayonnant  $h = 19,25 \text{ W. m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . On retrouve ainsi un même ordre de grandeur entre ce coefficient

valable pour tout le disque et le coefficient obtenu théoriquement pour les surfaces latérales. On choisit alors pour les surfaces latérales et la surface périphérique :

$$h_{d1} = h_{d2} = h_d = 19,25 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad (34)$$

soit un nombre de Biot pour le disque  $Bi = 0,0035$

Dans le cas du pion fixe, on utilise une valeur usuelle :

$$h_p = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad (35)$$

soit un nombre de Biot pour le pion  $Bi = 0,0015$

On dispose ainsi d'un ordre de grandeur de variation des coefficients de convection-rayonnement sur les surfaces latérales et à la périphérie du disque en mouvement et sur le pion fixe. Dans notre configuration, compte tenu des flux importants et localisés reçus par le disque, nous verrons par une simple analyse des sensibilités que l'imprécision sur les coefficients de convection – rayonnement n'a pas de conséquence majeure.

#### 4.4 Discrétisation spatiale

Le maillage du disque et du pion est obtenu à partir de la méthode des éléments finis. Etant donné que chaque solide est étudié indépendamment, il n'est pas nécessaire d'assurer la continuité du maillage à l'interface. Comme le montre la *figure 2*, on utilise des éléments triangles linéaires, les températures sont calculées en chaque nœud. Le maillage est fixe et généré à partir de l'algorithme de Delaunay [22]. On aboutit à l'expression des relations (23) à (26) et (27) à (30) sous la forme de deux modèles d'état représentés par les relations (5) et (6). Nous aurons besoin de comparer par la suite les solutions des modèles complets avec celles des modèles réduits. Pour cela, la résolution du système d'équations différentielles {(5)+(6)} est obtenue par discrétisation implicite en temps avec un pas de temps constant  $\Delta t$ , ce qui conduit à :

$$(\mathbf{C}-\Delta t \mathbf{A}) \mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{C} \mathbf{T}^{(i-1)}(t) + \Delta t \mathbf{E} \mathbf{j}_{d,p}^{(i)}(t), \quad \mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{T}_0 \quad (36)$$

Ce système linéaire est résolu à partir de la méthode itérative du gradient bi-conjugué stabilisé [23] avec pas de temps constant.

#### 4.4.1 Choix du maillage : analyse qualitative.

La discrétisation spatiale du domaine  $W_p$  occupé par le pion ne nécessite pas de précaution particulière, les transferts ayant lieu par diffusion seulement. L'examen de l'évolution du champ de température à la surface du disque met en évidence trois zones. Dans la zone de contact et de redistribution, le flux de chaleur reçu par le disque à l'interface pion - disque est redistribué par diffusion et transport. Le terme de transport et le gradient thermique sont importants, d'où la nécessité d'adopter un maillage fin dans cette zone. La zone périphérique est caractérisée par un phénomène de peau thermique. Ce phénomène est d'autant plus important que la vitesse de rotation du disque est grande. Dans ce cas, on peut assimiler le système à un disque fixe soumis à un flux de chaleur réparti uniformément sur toute sa circonférence et le transfert de chaleur dans le disque est assimilable à de la diffusion radiale. Enfin, dans la zone du noyau, le gradient thermique est faible et radial. Contrairement aux deux autres zones, le maillage peut donc y être plus grossier et n'est lié qu'aux contraintes de raccordement avec les deux autres zones. Les maillages du disque et du pion sont représentés sur la *figure 2*.

#### 4.4.2 Choix du maillage : étude de sensibilité du champ de température en fonction du maillage.

On réalise plusieurs simulations en raffinant à chaque fois le pas de discrétisation spatiale et donc en augmentant le nombre de noeuds. Les flux dans le disque et dans le pion sont constants et égaux à  $500 \text{ kW m}^{-2}$ . La comparaison des différents essais s'effectue au point A, situé à la périphérie du disque, dans la zone de contact avec le pion. Nous avons en effet vérifié que c'est en ce point que les erreurs étaient les plus

importantes. Les résultats de cette analyse sont présentés sur la *figure 3a* pour le disque et *3b* pour le pion. Pour le disque, on n'observe plus de variation significative sur la valeur de la température calculée au point A lorsque le nombre de nœuds est supérieur à 3995. Pour le pion cette observation est vraie lorsque le nombre de noeuds est supérieur ou égal à 460.

Avec ces maillages, nous analysons la sensibilité de la température calculée au point A en fonction des valeurs des coefficients d'échange par convection – rayonnement sur le disque et le pion. On choisit deux valeurs extrêmes des coefficients de convection – rayonnement :

$$\text{Pour le disque : } h_{\text{sup}} = 80 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad h_{\text{inf}} = 6 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

$$\text{Pour le pion : } h_{\text{sup}} = 20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad h_{\text{inf}} = 4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Par rapport aux coefficients calculés précédemment (relations 34 et 35), les résultats obtenus montrent un écart inférieur à 1%, ce qui démontre la faible sensibilité du modèle aux coefficients d'échanges dans la zone de frottement.

## 4.5 Mesures expérimentales

### 4.5.1 Le banc de test

Le banc de test est présenté *figure 4*. Le disque en acier est monté sur un tour. Un simple système de bras de levier à l'extrémité duquel des masses sont placées permet d'exercer la pression souhaitée sur le pion en bronze. Ce pion est chanfreiné afin d'éviter les vibrations. Les mesures sont effectuées à partir d'une caméra infrarouge qui permet l'obtention de l'évolution du champ de température au cours du temps sur toute la zone autour de l'interface de frottement. Les faces de mesure du disque et du pion sont recouvertes d'une peinture noire afin d'augmenter leurs émissivités. La calibration de cette émissivité est obtenue à partir d'une autre pièce en acier munie de thermocouples, recouverte de la même peinture et qui est chauffée dans un four à température uniforme.

La comparaison entre le signal de la caméra et les températures obtenues par thermocouples donne une émissivité égale à 0,98. La caméra est de type AVIO TVS 2000 MK2 et utilise 10 détecteurs InSb. Les mesures sont effectuées dans la zone 3–5,4• m de longueur d'onde. Un logiciel dédié à la caméra infrarouge permet d'enregistrer les évolutions des champs de température au cours du temps, pour une fréquence d'acquisition égale à 3 Hz.

#### 4.5.1 Etude de l'influence de la résolution spatiale et thermique.

La mesure expérimentale du bruit de la caméra, appelé aussi NETD (Noise Equivalent Temperature Difference) donne un écart de 0,2°C effectif. La mesure est numérisée sur 12 bits, ce qui correspond à 0,04°C, compte tenu du niveau choisi de l'amplification (échelle utilisée de -40 à 120°C). Ce niveau élémentaire de numérisation est donc précis par rapport au bruit thermique. La résolution spatiale est caractérisée par la réponse à une fente (voir les références [24] et [25]) appelée aussi SRF (Slit Response Function). Cette SRF est obtenue par la mesure du profil de température orthogonal à une fente dans laquelle on impose un niveau de température uniforme, constant et important par rapport au reste du champ thermique. Comme le montre la *figure 5*, la largeur de cette fente thermique est variable, ce qui permet de déterminer la variation de la température mesurée par la caméra en fonction de cette épaisseur.

On définit la modulation spatiale comme :

$$q = \frac{T - T_b}{T_s - T_b} \quad (37)$$

$T_s$  est la température de la fente,  $T_b$  la température du fond, et  $T$  température indiquée par la caméra.

Cette modulation spatiale dépend de la dimension angulaire  $\alpha$ , appelée période spatiale, définie à partir de la largeur de la fente. En traçant l'évolution de la modulation

spatiale en fonction de  $\alpha$ , on obtient alors la SRF, représentée sur la *figure 6*, dans la direction horizontale et la direction verticale. Comme le montre cette figure, pour une modulation de 98% correspondant à une sous-estimation du niveau thermique de 2%, la période spatiale est de 6 mrad pour une ligne et 3,2 mrad par colonne. Donc, pour cette caméra placée au plus près de la cible (distance focale minimum égale à 20 cm), la température donnée en un point par la caméra correspond à un domaine optique de 1,2 mm horizontalement sur 0,64 mm verticalement. Par ailleurs, le champ spatial est numérisé sur 256 colonnes par 100 lignes. Pour la distance cible - caméra de 20 cm, un pixel correspond alors à une surface de 0,263 mm horizontalement par 0,567 mm verticalement. Dans la direction horizontale, la numérisation est plus précise que la résolution spatiale. Dans la direction verticale elles sont du même ordre de grandeur. Cette résolution spatiale joue un rôle primordial. Tout d'abord, pour la mesure de température en plusieurs points du disque et du pion dans un domaine de petite taille correspondant à l'épaisseur de peau thermique, où le gradient thermique est important. D'autre part, pour la définition des frontières du disque et du pion, qui est nécessaire à la localisation des points de mesure vis à vis de l'interface disque - pion. Ainsi dans notre cas, le matériel à notre disposition reste limité par rapport à l'objectif visé. On note cependant que les caméras infrarouges actuellement sur le marché possèdent des caractéristiques bien plus performantes.

#### 4.5.2 Problème de synchronisation de la caméra par rapport au disque tournant.

La fréquence d'acquisition de la caméra infrarouge (3Hz), et la vitesse angulaire du disque (5,33 tours par seconde), ne sont pas synchronisées. Comme le présente la *figure 7*, la mesure effectuée donne la température en un point géographique fixe, qui est différent du point physique en rotation. Pour étudier l'influence du mouvement du disque, on effectue la mesure de l'évolution de température pour un point géographique situé

proche de l'interface pion - disque (point Q4, *fig. 10*), avec une première phase de chauffage obtenue par le frottement du disque en rotation sur le pion, puis une phase de refroidissement, correspondant au disque stoppé au bout d'un temps de 80 secondes. La mesure est reportée sur la *figure 8*. On observe alors entre les deux séquences, une augmentation du bruit entre le disque à l'arrêt (+/-0,4°C), et le disque en rotation (+/-0,6°C). Cette différence, qui reste suffisamment faible par rapport au niveau global d'augmentation de la température, peut s'expliquer par la non uniformité de l'état de surface latérale du disque et donc de l'émissivité.

#### 4.6 Résolution du problème inverse

##### 4.6.1 Choix des points utilisés pour la procédure d'inversion.

La localisation des points de mesure sur l'image obtenue à partir de la caméra dépend de sa résolution spatiale. Avec notre résolution, il n'est pas possible de repérer des points situés trop près de l'interface. Nous choisissons alors une distance égale à 4 mm entre les points de mesure et l'interface. A cette distance, les *figures 9a* pour le pion et *9b* pour le disque, montrent que la sensibilité de la température, aux points de mesure, vis à vis des flux reste acceptable pour la résolution des deux problèmes inverses (dans le disque et dans le pion). Comme cela est représenté sur la *figure 10*, 7 points de mesure sont choisis de part et d'autre de l'interface (P<sub>1</sub> à P<sub>7</sub> dans le pion et Q<sub>1</sub> à Q<sub>7</sub> dans le disque). Les temps de diffusion de la chaleur de l'interface jusqu'aux points P<sub>i</sub> de mesure dans le pion sont estimés par :  $t_d(P_i) = x(P_i)^2 / a_d$ . Comme nous l'avons signalé précédemment pour le disque, étant donné l'importance du terme de transport, le gradient de température est quasiment partout radial. Seul le temps de diffusion joue alors un rôle dans le transfert de flux entre l'interface et les points Q<sub>i</sub> de mesure. Il sera donc estimé par :  $t_d(Q_i) = x(Q_i)^2 / a_p$ . Nous portons dans le tableau I les valeurs des temps de

diffusion de la chaleur dans le disque et le pion en fonction des positions des points de mesure par rapport à l'interface.

#### 4.6.2 Calcul de la base modale optimale pour le disque.

Comme nous l'avons dit précédemment, la condition d'optimum revient à conserver les modes dont la constante de temps est supérieure ou égale au temps de transfert de la chaleur de la surface d'application du flux jusqu'au capteur le plus proche. D'autre part, lorsque plusieurs capteurs localisés à des distances différentes sont utilisés, les modes conservés dans le modèle réduit optimal ont des constantes de temps comprises entre le temps de diffusion minimal, pour le capteur le plus proche, et maximal pour le capteur le plus éloigné.

Nous validons ce critère à partir d'un signal donné, que nous cherchons à identifier à partir de l'évolution des températures aux points définis précédemment dans le pion (Points P1 à P7) et dans le disque (Points Q1 à Q7). La procédure de détermination de la base modale optimale pour la résolution du problème inverse dans le disque consiste à déterminer le nombre  $M$  de modes tels que la norme de l'écart entre le flux estimé et le flux réel soit minimale. Cette norme est définie par :

$$J(M) = \sqrt{\frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (j_i - \hat{j}_i(M))^2} \quad (38)$$

Le flux estimé avec  $M$  modes est noté  $\hat{j}(t, M)$  et  $N_d$  désigne le nombre d'échantillons tel que  $j_i = i \Delta t$ ,  $1 \leq i \leq N_d$ . Pour le calcul de base optimale nous avons considéré l'évolution du flux réel à identifier représenté sur la *figure 11*. La procédure d'estimation du flux à l'aide du modèle réduit sous la forme des relations (15) et (17) est donnée en annexe 2. Le pas de temps est  $\Delta t = 1$ s et donc le nombre de pas de temps futurs est :  $r = 1$ , pour que l'on ait :  $t_d = (r + 1)\Delta t$ .



Les résultats de cette étude sont présentés sur la *figure 12* où nous avons tracé la valeur de  $J(M)$  pour  $M$  variant de 6 à 22. Pour chaque valeur de  $M$ , nous calculons les valeurs propres, les vecteurs propres ainsi que les vecteurs propres adjoints à partir de la méthode d'Arnoldi. Nous portons dans le tableau II les temps de calcul pour chaque valeur de  $M$  ainsi que la valeur des constantes de temps des modes. L'ensemble des calculs sont effectués sur une machine peu performante (PC SCSI 350 Mhz 256 Mo de mémoire). Pour comparaison, nous avons calculé la base complète à partir de la méthode QR. Ce calcul nécessite plus de 6 heures de temps de calcul pour une puissante machine (fréquence de 1 Ghz et capacité mémoire de 1 Go). Comme le montre le tableau II, le calcul de la base réduite d'ordre  $M = 9$  pour le disque par Arnoldi ne nécessite que 0,22 seconde de temps de calcul, pour une précision équivalente sur les valeurs obtenues.

Pour le disque on observe un décalage de un mode entre l'erreur minimum obtenue pour le 9<sup>ième</sup> mode et le temps de diffusion moyen correspondant à la constante de temps du 8<sup>ième</sup> mode. Ce décalage peut s'expliquer par le fait que le temps de diffusion moyen n'est qu'une estimation de l'ensemble des différents temps de diffusion. La différence entre les valeurs de  $J(8)$  et  $J(9)$  n'est que de 1,2%. On choisit alors d'utiliser un modèle réduit à 8 modes obtenu en utilisant le critère de troncature lié au temps de diffusion moyen, soit donc  $M_{opt} = 8$ , dont la constante de temps est égale à 1,95 secondes. Afin de quantifier la reproductibilité du modèle réduit optimal, nous traçons sur la *figure 13* l'écart entre les températures calculées au point A à partir du modèle complet et du modèle réduit lorsque le flux est constant égal à  $500 \text{ kW m}^{-2}$ . On visualise par ailleurs l'écart entre les résultats obtenus par les deux modèles réduits de 8 à 9 modes. Enfin, l'écart entre les valeurs calculées à partir du modèle réduit d'ordre  $M_{opt} = 8$  et celles calculées à partir du modèle complet tend vers 0 lorsque  $t \geq 2s \approx t_{M_{opt}}$ . Le temps de

calcul pour le modèle complet est égal à 49 minutes pour une durée simulée de 10 secondes avec un pas de temps égal à 0,05 seconde. Le calcul de l'évolution de température du point A par le modèle réduit ne nécessite que 0,6 secondes.

Les flux estimés avec les modèles réduits optimaux  $M_{opt}=8$  et  $M_{opt}=9$  sont tracés sur la *figure 11*. On note que l'erreur ne dépasse pas 1%. Le temps d'estimation pour le modèle à 8 modes est de 6 secondes. Pour comparaison, nous avons estimé le flux à partir du modèle complet représenté par les relations (5) et (6). La méthode d'estimation, décrite en annexe 3, est toujours basée sur la méthode séquentielle avec spécification de fonction constante sur  $r$  pas de temps futurs. Le temps de calcul pour l'estimation est cette fois-ci égal à 40 heures, soit 24000 fois plus long qu'avec le modèle réduit optimal.

D'autre part, on note des oscillations importantes sur le flux estimé, qui résulte de la valeur importante du pas de temps  $\Delta t = 1s$ . En effet, la méthode inverse est un processus d'optimisation et doit respecter les contraintes de précision du problème direct, c'est à dire pour le modèle complet un faible pas de temps. Pour travailler à valeur constante du produit  $\Delta t.(r+1)$ , on peut estimer pour le problème complet que le choix d'un pas de temps de calcul de 0,05 seconde avec un nombre de pas de temps futurs égal à 19 permettrait alors à la procédure d'identification du modèle complet de donner de meilleurs résultats, mais ceci entraînerait alors un temps de calcul énorme de l'ordre de 800 heures.

En ce qui concerne le modèle réduit modal, son utilisation pour le problème direct n'est liée à aucune contrainte en terme de pas de temps. On s'affranchit alors pour le problème inverse de cette contrainte, et il suffit de choisir un seul pas de temps et d'adapter la valeur du pas de temps de calcul.

#### 4.6.3 Calcul de la base modale optimale pour le pion.

En reprenant la même démarche que pour le disque, on obtient le résultat attendu, à savoir que l'ordre de réduction optimal est :  $M_{opt} = 16$ . D'après le tableau II, la constante de temps associée à  $M_{opt}$  correspond bien à la moyenne des temps de diffusion lié à chaque capteur, donnés dans le tableau I. La fonction  $J(M)$  est tracée sur la *figure 12*.

#### 4.7 Identification du flux lors d'un essai et validation des résultats obtenus

Les températures obtenues lors d'un essai aux points de mesures dans le pion et dans le disque sont fortement bruitées. Cela nécessite un filtrage des données préalablement à la résolution du problème inverse. Un filtre du premier ordre dont la fréquence de coupure est égale à celle de Nyquist, soit 1,5 Hz, est appliqué sur les mesures aux points  $P_1$  à  $P_7$  et  $Q_1$  à  $Q_7$ . Sur la *figure 14*, sont portées les évolutions des températures filtrées aux différents points de mesure dans le pion et le disque. On note des températures identiques pour les sept points de mesure dans le disque. Dans le pion les effets de bord entraînent des écarts entre les différentes températures mesurées. Nous estimons les flux dans le pion et le disque à l'aide des deux modèles réduits optimaux obtenus à l'étape précédente. Le temps de calcul pour l'estimation du flux de chaleur dans le disque est égal à 9,67 s et égal à 0,61 s pour l'estimation du flux de chaleur dans le pion, ceci pour une durée simulée de 70 secondes. Les flux estimés sont tracés sur la *figure 15*. On remarque qu'au cours du temps, le flux reçu par le disque augmente, alors que le flux reçu par le pion diminue. Le flux total reste alors à peu près constant, ce qui semble indiquer que, soit le coefficient de frottement caractéristique du phénomène est peu sensible à une variation de la surface de contact, soit cette variation de surface de contact reste faible.

La validation de ces résultats est effectuée au travers de deux approches :

#### 4.7.1 Validation indirecte par comparaison des températures.

Nous représentons sur la *figure 16* les températures obtenues aux points B, C, D, E, F et G par simulation des modèles complets pour les flux estimés. Sur la même figure nous portons les mesures expérimentales effectuées en ces différents points. On note une assez bonne concordance entre simulation et mesures. Pour le pion on note que la validation permet de retrouver les bonnes valeurs à grande distance de l'interface de frottement (point G). Par contre pour des positions proches de l'interface, on remarque une sous-estimation du flux au centre du pion (point D), et une sur-estimation à proximité des frontières (points D et E). Ces résultats semblent montrer que le flux n'est pas constant le long de l'interface de frottement, et que le flux identifié n'est alors qu'un flux moyen.

#### 4.7.2 Validation directe par mesures expérimentale de la puissance dissipée par frottement.

La mesure de la puissance dissipée mécaniquement lors du frottement est évaluée par la mesure de la puissance électrique du tour, à vide et en charge. La mesure des différents paramètres électriques va non seulement permettre de connaître les puissances en charge et à vide, mais également les différents termes de pertes. On mesure une puissance électrique efficace constante égale à 80 W.

On note sur la *figure 15* un écart de l'ordre de 15 % entre la puissance électrique mesurée et la puissance thermique égale à la somme des flux estimés dans le pion et dans le disque. Si l'on met de côté les paramètres connus précisément ou peu sensibles tels que la précision du maillage, le coefficient de convection-rayonnement, les propriétés des matériaux, l'augmentation de la surface de frottement liée à l'usure (1,6% d'erreur pour une durée d'essai de 70 secondes), deux principales causes peuvent être envisagées : En premier lieu nous avons vu que les performances de la caméra infrarouge en terme de résolutions spatiale et thermique sont limitées. Par ailleurs, il n'a pas été possible de tenir

compte d'une éventuelle variation de la surface de frottement liée non pas à l'usure mais à une dilatation différentielle des deux matériaux qui entraîne une non-uniformité de contact entre le pion et le disque. Cette variation influe sur la géométrie modélisée ainsi que sur la comparaison puissance électrique – flux thermique total obtenu à partir des densités de flux identifiées.

Quoiqu'il en soit cette différence ne remet pas en cause la démarche utilisée.

## **5. Conclusion**

La méthode de réduction modale appliquée à la résolution des problèmes inverses, permet d'aborder l'étude de modèles thermiques de grandes dimensions avec des temps de calculs réduits et sans perte d'information en regard de la solution obtenue à partir du modèle complet. La formulation modale fait apparaître explicitement les constantes de temps au travers des éléments propres. Ceci permet d'utiliser le modèle sur un intervalle de temps compatible avec la fonction de sensibilité de la température vis à vis de la grandeur estimée. Par-là nous avons établi un critère reliant la constante de temps à la position des points étudiés. Très précisément nous proposons de ne conserver que les modes dont la constante de temps est supérieure ou égale au temps de diffusion de la chaleur depuis la surface sollicitée jusqu'au capteur le plus proche.

Lors de la simulation, le modèle réduit s'avère stable quelle que soit la valeur du pas de temps. On peut donc résoudre le problème inverse en utilisant une méthode séquentielle avec spécification de fonction constante sur un seul pas de temps futur. Par comparaison, l'utilisation du modèle complet nécessite d'adapter la valeur du pas de temps au critère de stabilité de la solution puis la valeur du nombre de pas de temps futurs aux valeurs de ce pas de temps et du temps de diffusion depuis la surface sollicitée jusqu'au capteur.

Du point de vue de la réduction, la démarche proposée s'apparente à une troncature de la base modale, mais où seuls quelques modes sont nécessaires. Il est donc inutile de déterminer au préalable l'intégralité de la base modale. Ceci est rendu possible en adoptant une technique de calcul par sous-espace : la méthode d'Arnoldi. Cette technique est très rapide et peu coûteuse en terme de ressources informatiques si nous la comparons avec l'algorithme classique « QR » pour le calcul de la base complète.

La méthode a été appliquée au problème de transfert bidimensionnel de la chaleur dans un disque tournant en frottement avec un pion fixe. Le but était d'estimer le flux de chaleur dégagé au contact des deux corps. La comparaison numérique entre les modèles modal réduit et complet, utilisés dans la résolution du problème inverse, montre l'avantage du premier sur le second du point de vue de la vitesse de calcul, à précision équivalente. La pertinence du critère de troncature est confirmée, aussi bien pour le corps fixe que pour la partie mobile. Une validation expérimentale a été menée à partir d'un banc test reprenant cette configuration, et utilisant une mesure par thermographie infrarouge. On note une différence de l'ordre de 15% entre les résultats obtenus par méthode inverse réduite et celui obtenu par la mesure de la puissance électrique consommée par le tour.

Globalement, l'utilisation d'un modèle réduit modal se révèle performant pour les problèmes inverses, si on utilise le critère de troncature préconisé associé à l'algorithme d'Arnoldi.

## Bibliographie

- [1] Petit D., Pasquetti R., Réduction de modèle par identification des modes dominants: application à un modèle bidimensionnel de diffusion thermique, *Rev. Phys. Appl.* 29 (1990) 599-617.
- [2] Petit D., Systèmes thermiques diffusifs: Modélisation de leur comportement par identification des modes dominants, *Rev. Gén. Therm.* 378 (1993) 302-310.
- [3] Petit D., Hachette R., Veyret D., Model reduction applied to a heat diffusive model, Eurotherm Seminar 36, Futuroscope France, Septembre 1994.
- [4] Bacot P., Neveu A. et Sicard J., Analyse modale des phénomènes thermiques en régime variable dans le bâtiment, *Rev. Gen. Therm.* 267 (1984) 189-201.
- [5] Marshall S. A., An approximate method for reducing the order of linear system, *Control* (1966) 642-653.
- [6] Litz L, Order Reduction of linear state-space models via optimal approximation of non dominant modes, *Large Scale System Vol. 2* (1981) 171-184.
- [7] Oulefki A. et Neveu A., Réduction par amalgame modal d'un modèle thermique. *Journal de Physique III n°2* (1993) 302-320.
- [8] El Khoury K. et Neveu A., Analyse modale des systèmes thermiques en présence de transferts non réciproques, *Int. Heat Mass Transfer Vol. 32* (1989) 213-226.
- [9] Beck J. V., Blackwell B., St. Clair C.R., *Inverse heat conduction: Ill posed problems*, Wiley, New York, 1985, pp. 108-160.
- [10] Petit D. et Peruzzi S., Régularisation d'un problème inverse en conduction par l'utilisation d'un modèle réduit identifié, *Congrès SFT : Thermique et Transport*, Editions Elsevier, 1996 pp. 114-119.

- [11] Videcoq E. and Petit D., Model reduction for the resolution of multidimensional inverse heat conduction problems, *Heat and Mass Transfer* Vol. 44 (2001) 1899-1911.
- [12] Girault M., Videcoq E., Petit D., Battaglia J.-L., Model reduction applied to inverse and direct problems for a fluid in a 2D plane channel, Eurotherm, Heidelberg, seminar 67, 5-7 march 2000.
- [13] Battaglia J.-L. et Neveu A., Identification du flux de chaleur dans un procédé d'usinage - Utilisation d'un modèle modal réduit. Congrès SFT 1998, Editions Elsevier, pp. 295-300.
- [14] Battaglia J.-L., A modal approach to solve inverse heat conduction problems, *Inverse Problems in engineering* Vol. 10 n°1 (2002) 41-63.
- [15] Arnoldi W. E., The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalues problem, *Quart. Appl. Math.* Vol. 9 (1951) 17-29.
- [16] Lehoucq R. B. and Sorenson D. C., Deflation technics, for an implicitly restarted Arnoldi iteration, CAAM-TR 94-13, Rice University, Houston, 1994.
- [17] Radke R. J., A matlab implementation of the implicitly restarted Arnoldi method for solving large-scale eigenvalues problems, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree Master of Arts, Rice university, Houston, Texas, 1996.
- [18] Tikhonov A.N. and Arsenin V. Y., *Solution of ill posed problems*, V.H. Winston and Sons, Washington DC, 1977.
- [19] Laraqui N, Températures de contact et coefficient de partage de flux généré par frottement sec entre deux solides. Approche nouvelle de la génération de flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 35 (1992) 3131-3139.



- [20] Wagner C., Heat transfer from a rotating disk in ambient air, J. of Appl. Phys. Vol. 19 (1948) 937-841.
- [21] Cobb E. C. and Saunders O. A., Heat transfert from a rotating disk, Proc. Roy. Soc. A. Vol. 220 (1956) 343-351.
- [22] George P. L., Automatic mesh generation – Application to finite elements methods, Wiley, 1991.
- [23] Lascaux P. et Théodor R., Analyse numérique matricielle appliquée à l’art de l’ingénieur, Tome 2 : Méthodes Itératives, ed. Dunod, 2ème édition, 1994.
- [24] Pajani, D., Mesure par thermographie infrarouge, Add Editeur, 1989, pp. 185-200.
- [25] Caussorgue, G., La thermographie infrarouge, principes, technologies, applications, 4<sup>ème</sup> édition, Edition Tech et Doc, 1999, pp. 400-420.

**Annexe I : Calcul de quelques valeurs propres et vecteurs propres associé d'une matrice non-Hermitienne par la méthode d'Arnoldi.**

Elle s'applique à une matrice A quelconque. Par analogie avec la méthode de Lanczos, on détermine une base orthonormée  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq N_0}$  engendrant l'espace de Krylov :

$K_{N_0}(\mathbf{A}, v_1) = \{v_1, \mathbf{A} v_1, \mathbf{A}^2 v_1, \dots, \mathbf{A}^{N_0-1} v_1\}$ , avec  $\|v_1\| = 1$ . On cherche à construire  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq N_0}$

tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} v_1 &= h_{1,1} v_1 + h_{2,1} v_2 \\ \mathbf{A} v_2 &= h_{1,2} v_1 + h_{2,2} v_2 + h_{3,2} v_3 \\ &\vdots \\ \mathbf{A} v_{N_0} &= h_{1,N_0} v_1 + h_{2,N_0} v_2 + \dots + h_{N_0+1,N_0} v_{N_0+1} \end{aligned} \quad (39)$$

L'algorithme, pour  $1 \leq j \leq N_0$ , est le suivant :

$$\begin{aligned} h_{j,k} &= \langle \mathbf{A} v_k, v_j \rangle \\ z_k &= \mathbf{A} v_k - \sum_{j=1}^i h_{j,k} v_j \\ \text{si } z_k \neq 0, h_{k+1,k} &= \|z_k\| \\ v_{k+1} &= \frac{z_k}{\|z_k\|} \end{aligned} \quad (40)$$

A chaque itération on obtient la matrice de Rayleigh sous la forme de Hessenberg :

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^* \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & \dots & h_{1,N_0} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & \dots & h_{2,N_0} \\ & \circ & \circ & & \vdots \\ & & \circ & \circ & \vdots \\ & & & h_{N_0,N_0-1} & h_{N_0+1,N_0} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Que l'on diagonalise à l'aide de la méthode QR. On obtient ainsi les éléments de Ritz  $[z_i, \tilde{V}_i]$  de la matrice B et donc les éléments propres  $[z_i, V_i = \mathbf{Q} \tilde{V}_i]$  de A.

L'algorithme est amélioré en ré-orthogonalisant les vecteurs propres à chaque itération, à partir de la méthode de Gram-Schmidt.

**Annexe 2 : Résolution d'un problème inverse à partir du modèle d'état réduit sous forme modale.**

En adoptant un pas de temps  $\Delta t$ , la solution de l'équation d'évolution sous forme modale (17) s'exprime, à l'aide de la relation (15) d'évolution des états, comme :

$$\tilde{\mathbf{T}}_{k+1} = [\tilde{\mathbf{V}} e^{\tilde{\cdot} \Delta t} + \mathbf{S}] \mathbf{U}_{k+1} + \tilde{\mathbf{V}} e^{\tilde{\cdot} \Delta t} [\tilde{\mathbf{X}}_k - \tilde{\cdot} \mathbf{U}_k] \quad (42)$$

Avec :

$$\tilde{\mathbf{X}}_0 = \tilde{\cdot} \mathbf{U}_0 \quad (43)$$

Si on suppose que le vecteur des sollicitations est constant de  $t = (k+1)\Delta t$  à  $t = (k+1+r)\Delta t$  ( $r$  désigne le nombre de pas de temps futurs); soit  $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{L} = \mathbf{U}_{k+1+r}$ , la relation (42) devient :

$$\tilde{\mathbf{T}}_{k+1+j} = \mathbf{N}_j \mathbf{U}_{k+1} + \mathbf{f}_j \quad 0 \leq j \leq r \quad (44)$$

où :

$$\mathbf{N}_j = \tilde{\mathbf{V}} e^{(j+1)\tilde{\cdot} \Delta t} \tilde{\cdot} + \mathbf{S} \quad (45)$$

et :

$$\mathbf{f}_j = \tilde{\mathbf{V}} e^{(j+1)\tilde{\cdot} \Delta t} [\tilde{\mathbf{X}}_k - \tilde{\cdot} \mathbf{U}_k] \quad (46)$$

La relation (44) est mise sous la forme matricielle suivante :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{N} \mathbf{U}_{k+1} + \mathbf{f} \quad (47)$$

avec :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{N}_r \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{f}_r \end{bmatrix} \quad (48)$$

Ainsi on obtient l'estimation de  $\mathbf{U}_{k+1}$  au sens des moindres carrés linéaires comme :

$$\hat{\mathbf{U}}_{k+1} = \left( {}^T \mathbf{N} \mathbf{N} \right)^{-1} {}^T \mathbf{N} (\mathbf{Y} - \mathbf{f}) \quad (49)$$

Notons que la quantité  $\left( {}^T \mathbf{N} \mathbf{N} \right)^{-1} {}^T \mathbf{N}$  ne doit être calculée qu'une seule fois, lors de la première itération.

**Annexe 3 : Résolution d'un problème inverse à partir du modèle d'état complet.**

Le modèle d'évolution de la température obtenu après discrétisation spatiale des équations aux dérivées partielles est représenté sous la forme du modèle d'état :

$$\mathbf{C} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{T}(t) + \mathbf{E} \mathbf{U}(t) \quad (50)$$

Si  $\mathbf{H}$  définit la matrice d'observation dans laquelle on précise la position des points de mesure sur les noeuds du maillage, on a :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H} \mathbf{T}(t) \quad (51)$$

La discrétisation implicite en temps des relations (50) et (51) donne :

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{D} \mathbf{T}^{(n-1)} + \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n)} \quad (52)$$

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \mathbf{H} \mathbf{T}^{(n)} \quad (53)$$

Avec :

$$\mathbf{D} = (\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C}, \quad \mathbf{F} = \Delta t (\mathbf{C} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} \quad (54)$$

En remplaçant (n) par (n+1) dans les relations (52) et (53) donne :

$$\mathbf{Y}^{(n+1)} = \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{T}^{(n)} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n+1)} \quad (55)$$

En substituant la valeur de  $\mathbf{T}^{(n)}$  par son expression dans la relation (55) conduit à :

$$\mathbf{Y}^{(n+1)} = \mathbf{H} \mathbf{D}^2 \mathbf{T}^{(n-1)} + \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n+1)} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n)} \quad (56)$$

En répétant ce processus  $(n + r)$  fois on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(n)} &= \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{T}^{(n-1)} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n)} \\ \mathbf{Y}^{(n+1)} &= \mathbf{H} \mathbf{D}^2 \mathbf{T}^{(n-1)} + \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n+1)} + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n)} \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}^{(n+r)} &= \mathbf{H} \mathbf{D}^{n+r+1} \mathbf{T}^{(n-1)} + \mathbf{H} \mathbf{D}^{r-1} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n+r+1)} + \mathbf{H} \mathbf{D}^{r-2} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n+r+1)} + \dots + \mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{U}^{(n)} \end{aligned} \quad (57)$$

En supposant que  $\mathbf{U}$  est constant de  $(n)$  à  $(n+r)$ , ce système se met sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{X}\mathbf{U} \quad (58)$$

dans laquelle :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{(n)} \\ \mathbf{Y}^{(n+1)} \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{Y}^{(n+r)} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{T}^{(n-1)} \\ \mathbf{H}\mathbf{D}^2\mathbf{T}^{(n-1)} \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{H}\mathbf{D}^{n+r+1}\mathbf{T}^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{F} \\ \mathbf{H}\mathbf{D}\mathbf{F} + \mathbf{H}\mathbf{F} \\ \mathbb{M} \\ \mathbf{H}\mathbf{D}^{r-1}\mathbf{F} + \mathbf{H}\mathbf{D}^{r-2}\mathbf{F} + \mathbb{L} + \mathbf{H}\mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Finalement, l'estimation de  $\mathbf{U}(k)$  au sens des moindres carrés linéaires est :

$$\hat{\mathbf{U}}(k) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{T}}) \quad (59)$$

### Condensed article

For heat conduction problems, the use of reduced models permits to decrease significantly the computation time. Reduced models can be obtained from several ways. Two classes of methods are well known, which consist in the decomposition of the thermal fields of the studied system on an eigenfunctions family. The first one consists in identifying the reduced model composed by  $N$  eigenmodes from the response of the complete model that receives fluxes following Heaviside functions [1-3]. The second method, which is used here, is based on the reduction of the complete modal model associated with the heat transfer operator [4]. Different criteria can be used [6-7]. A particularly simple and efficient one consists in perform a truncature, that is to keep only the eigenvalues which are characterised by the more important time constant [5]. For problems containing a term of heat transport, the eigenvectors are complex, and the truncature just considers the real part of the eigenvalues [8].

This reduced model is particularly interesting for the resolution of inverse heat conduction problems, in which the goal is to identify the flux boundary condition from the temperature measurement near the considering boundary [10-13]. In fact the sequential methods used [9] need the direct simulation at each time step, then the computation time can be very important.

For the use of a reduced model obtained by truncature in an inverse problem, Battaglia [14] has shown that an optimal order of the reduction could be obtained in just keeping the eigenmodes, which the time constant is bigger than the diffusion time of the thermal signal between the boundary where the flux is unknown and the thermal measurement points. This diffusion time can be estimated by the relation  $t_{diff} = \frac{e^2}{a}$ , where  $e$  is the

distance between the boundary and the measurement points, and  $\alpha$  is the diffusivity of the material.

Because of the truncature, it is not necessary to compute all the eigenvector of the modal model. In using the Arnoldi technique [15-17], it is possible to compute only the desired number of eigenmodes in a determined domain (annexe I). This method is particularly interesting when the mesh precision leads very large-scale matrix, and when the number of eigenmodes kept in the reduction is weak.

Furthermore Battaglia [14] has shown that the reduction has no effect on the regularisation for the different 1D and 2D developed applications.

This article reminds the modal formulation developed for a problem with heat transport (eq 1-17), and presents an application of this method for an inverse problem, in which the goal is to identify the fluxes obtained by the friction of a fixed pin against the periphery of a disk in rotation around his axis and received by the disk and by the pin (*figure 1*). These two identifications are performed separately.

Because the disk and the pin are thin, the problem is two-dimensional, and a term of accommodation is taken into account in the heat equation (eq 23-30). All thermal parameters of the used materials are well known and the convection and thermal radiation coefficients are determined by correlations [20-21] and verified experimentally (eq 31-35).

The numerical model is obtained by the finite elements method. The mesh is fixed (*figure 2*) and obtained by the Delauney algorithm [22]. The discretisation of the pin does not need specific precautions. For the disk, a qualitative analysis shows the necessity to use a precise mesh near the slide interface and at the disk periphery. Numerical simulations (*figure 3*) show the necessity to use meshes composed of 460 nodes for the pin, and of 3000 nodes for the disk



The test bench used for the temperature measurement (*figure 4*) is set to a turning lathe in which a steel disk is set. The device consists in a simple lever arm at the extremity of which masses are fixed and permit to operate a precise pressure on a bronze pin, which is rubbing against the disk periphery. The pin is beforehand worn, and fits perfectly on the disk geometry. Temperature measurement is performed by an infrared camera which permits to obtain the time evolution of the entire thermal field recorded. The characterisation of the camera shows that its spatial resolution [24-25] is not precise (*figures 5-6*): the temperature recorded at a point corresponds with an optical domain defined by 1.2 mm vertically and 0.6 mm horizontally. This inaccuracy leads to problems for the determination of the position of the points near the interface used for the inverse problem, and of precision of the temperature in a domain where the thermal gradient is important. Furthermore analysis (*figure 7*) and measures (*figure 8*) show that the non-synchronisation between the disk in movement and the camera poses no problem. Because of the technical limits of the used camera, points used for the inverse problem are located at 4 mm of the friction interface (*figure 10*). Seven points are used for the disk and for the pin. From the localisation of these points it is then possible to estimate the diffusion time between the interface where the flux appears and the measurement points (table I). The validation of the used criterion for the reduction is made numerically in identifying a known flux for different orders of reduction (*figure 11*). The comparison between the different quadratic errors between the real flux to be identified and the identified flux (*figure 12*) shows that the time constant of the smaller eigenmodes kept corresponds with the calculated time diffusion (table II). For the disk we keep 8 modes and for the pin 16 modes. With the reduced model the gained time computation is very high: for the disk, the identification of the flux during 45 seconds with a time step of 1 second is obtained in

6 seconds, instead of 40 hours necessary for the same identification obtained by the complete model. Furthermore the computation time necessary for the reduction calculation is very low too, thanks to the Arnoldi method. For the disk only 8 eigenvectors have to be calculated among the 3000 eigenvectors describing the complete modal model. These 8 eigenmodes are obtained in 0.22 second. The result can be compared with the QR method, which gives all the eigenmodes in 6 hours with material equipped with memories capacities equal to 1 Go and a frequency equal to 1.7 GHz.

The two reduced models obtained (for the pin and for the disk) are then used from experimental measures, which are filtrated (*figure 14*). The identification of the fluxes dissipated by the slide (*figure 15*) during 70 seconds and with a step time of 1 second is obtained in a computation time equal 9.66 seconds for the disk and 0.9 second for the pin. Real time identification is then possible. One indirect validation is performed by the comparison between the experimental temperatures and the simulated temperatures obtained from the identified fluxes (*figure 16*). One direct validation is made in which the sum of the two fluxes identified at the boundaries of the pin and of the disk is compared to the electrical power of the turning lathe necessary to obtain the friction (*figure 15*). We note a difference of 15% between the measured flux and the identified flux.

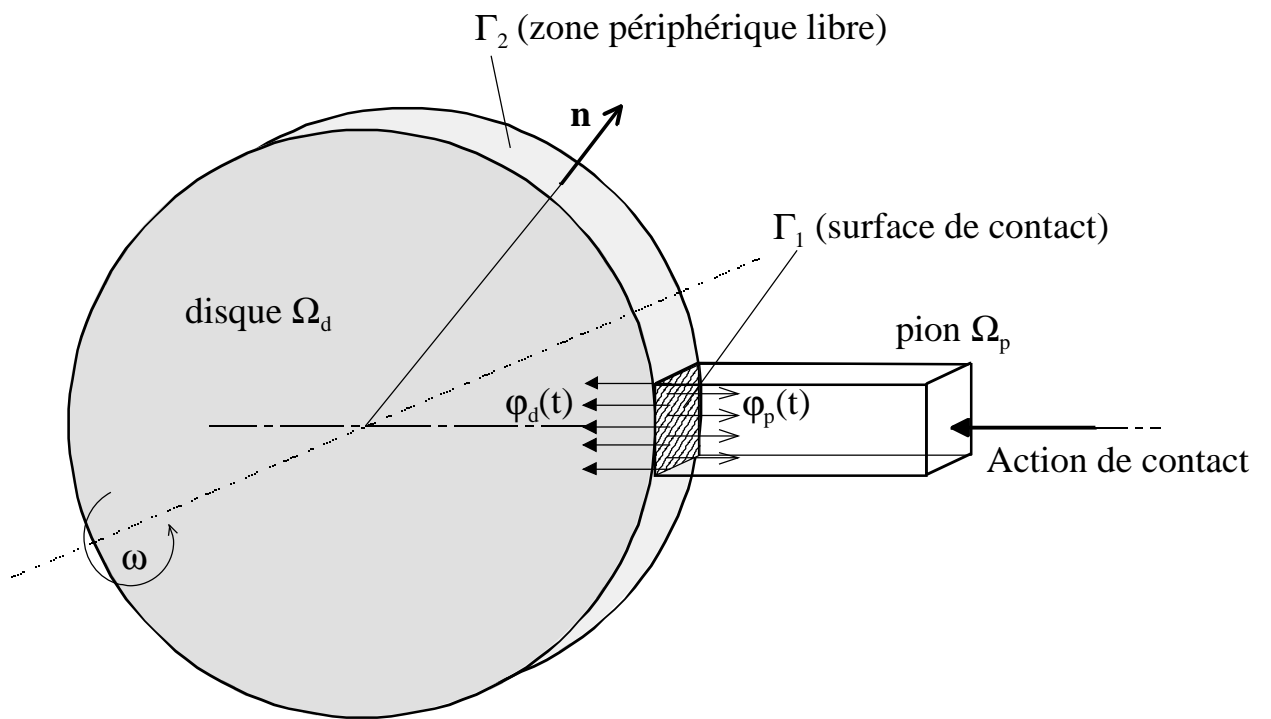
**Tableau I** : temps de diffusion pour chaque point de mesure en faisant l'hypothèse de transfert 1D.

	Point	$e$ (mm)	$t_d$ (s)	$t_d$ moyen (s)
pion	P1	4,78	2,61	2,19
	P2	4,37	2,18	
	P3	4,13	1,95	
	P4	4,00	1,83	
	P5	4,13	1,95	
	P6	4,37	2,18	
	P7	4,78	2,61	
disque	Q1	3,24	1,75	2,23
	Q2	3,65	2,22	
	Q3	3,89	2,53	
	Q4	3,98	2,63	
	Q5	3,89	2,53	
	Q6	3,65	2,22	
	Q7	3,24	1,75	

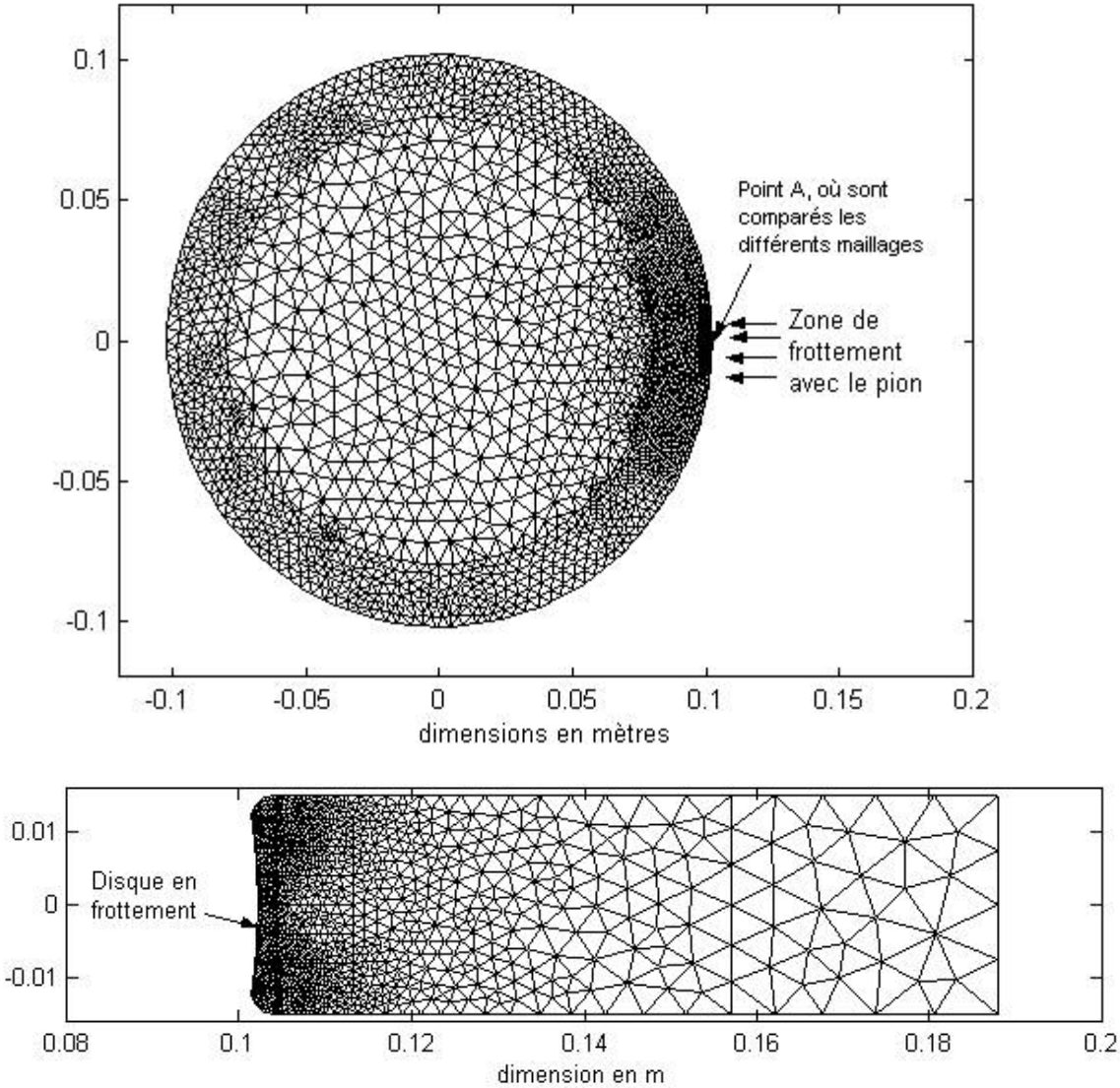
**Tableau II** : constantes de temps des modes calculés par la méthode d'Arnoldi.

$M$	disque			pion		
	$\tau_M$	tcpu (s)	$J$ ( $10^5 \cdot W/m^2K^{-1}$ )	$\tau_M$	tcpu (s)	$J$ ( $10^5 \cdot W/m^2K^{-1}$ )
1	732,42			1495,10		
2	91,87			81,53		
3	29,39	0,16	3,5138	20,94		
4	13,47	0,16	2,7382	10,19		
5	7,56	0,16	2,2198	9,30		
6	4,51	0,16	1,8196	9,07		
7	2,68	0,16	1,6172	6,80		
8	1,95	0,21	1,5021	5,17		
9	1,05	0,22	1,4847	4,79		
10	0,81	0,22	1,4855	3,37	0,28	1,1958
11	0,49			3,26		
12	0,45	0,49	1,4938	2,50	0,28	1,0374
13	0,45			2,42		
14	0,33	0,6	1,4943	2,30	0,28	1,0319
15	0,33			2,21	0,28	1,0161
16	0,25	0,83	1,4949	2,12	0,28	1,0156
17	0,25			1,88	0,33	1,0163
18	0,20	1,09	1,4949	1,78	0,39	1,0163
19	0,24			1,59	0,44	1,0229
20	0,24	1,32	1,4949	1,58	0,44	1,0299
21	0,13			1,34		
22	0,15			1,31	0,44	1,0315
23	0,15			1,20		

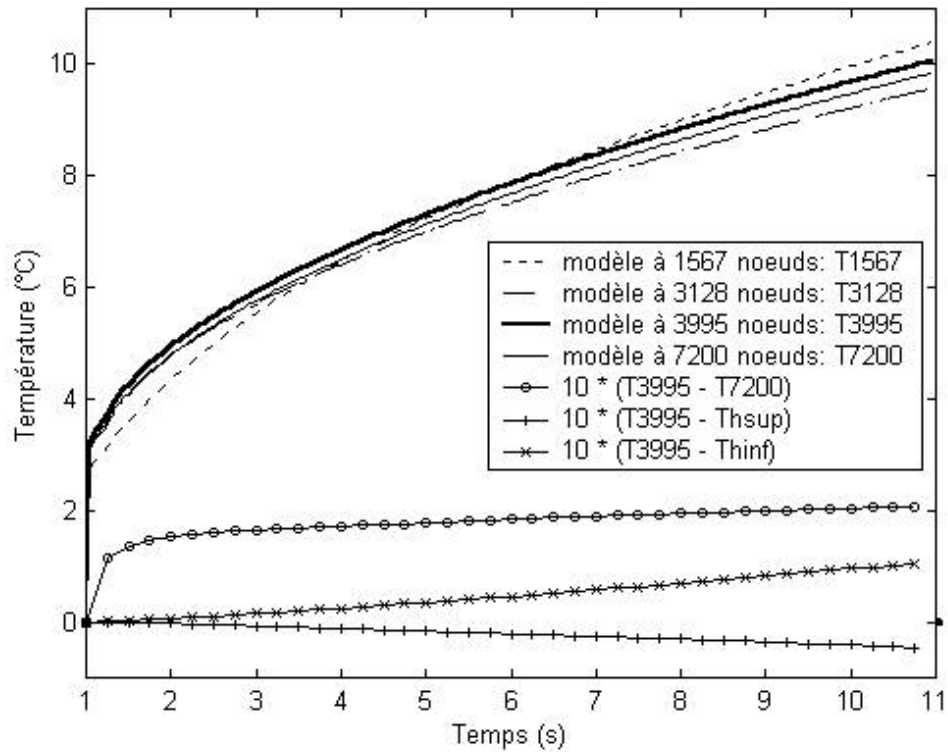
**Figure 1** : Schéma de principe de l'application étudiée



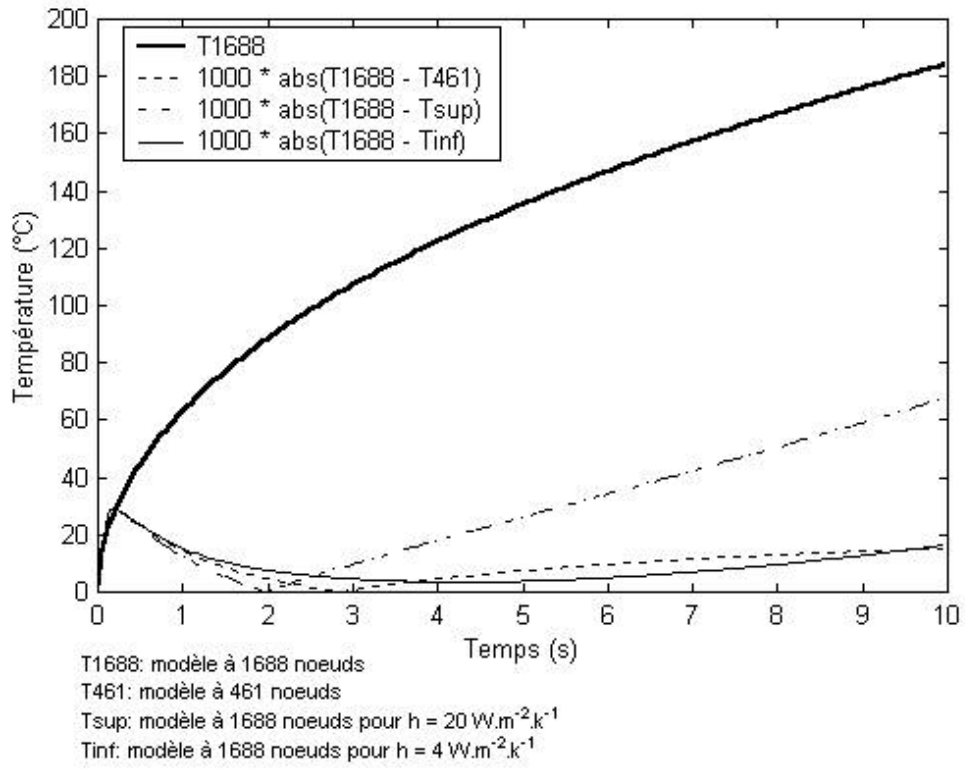
**Figure 2 :** Génération du maillage dans le pion et dans le disque avec l'algorithme de Delaunay à partir d'éléments triangulaires.



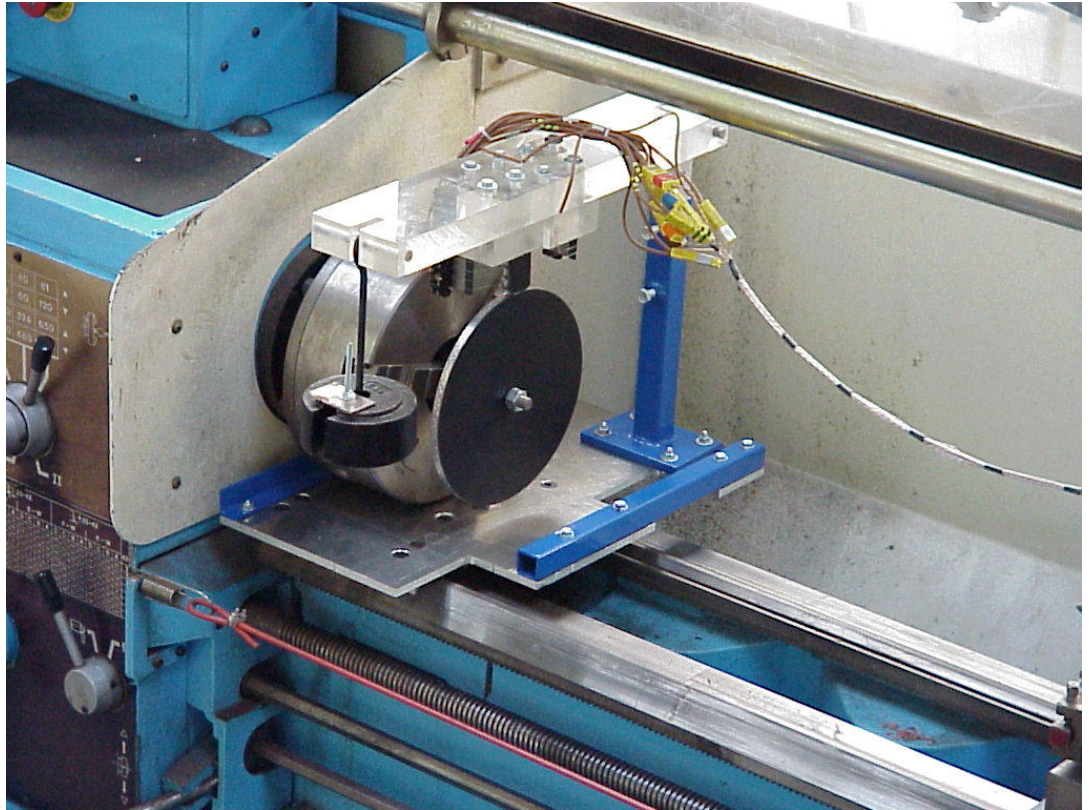
**Figure 3a** : Calcul de la température au point A dans le disque en fonction du nombre de noeuds. Le flux imposé est constant et égal à  $500 \text{ kW/m}^2$ .



**Figure 3b** : Calcul de la température au point A dans le pion en fonction du nombre de noeuds. Le flux imposé est constant et égal à  $500 \text{ kW/m}^2$ .

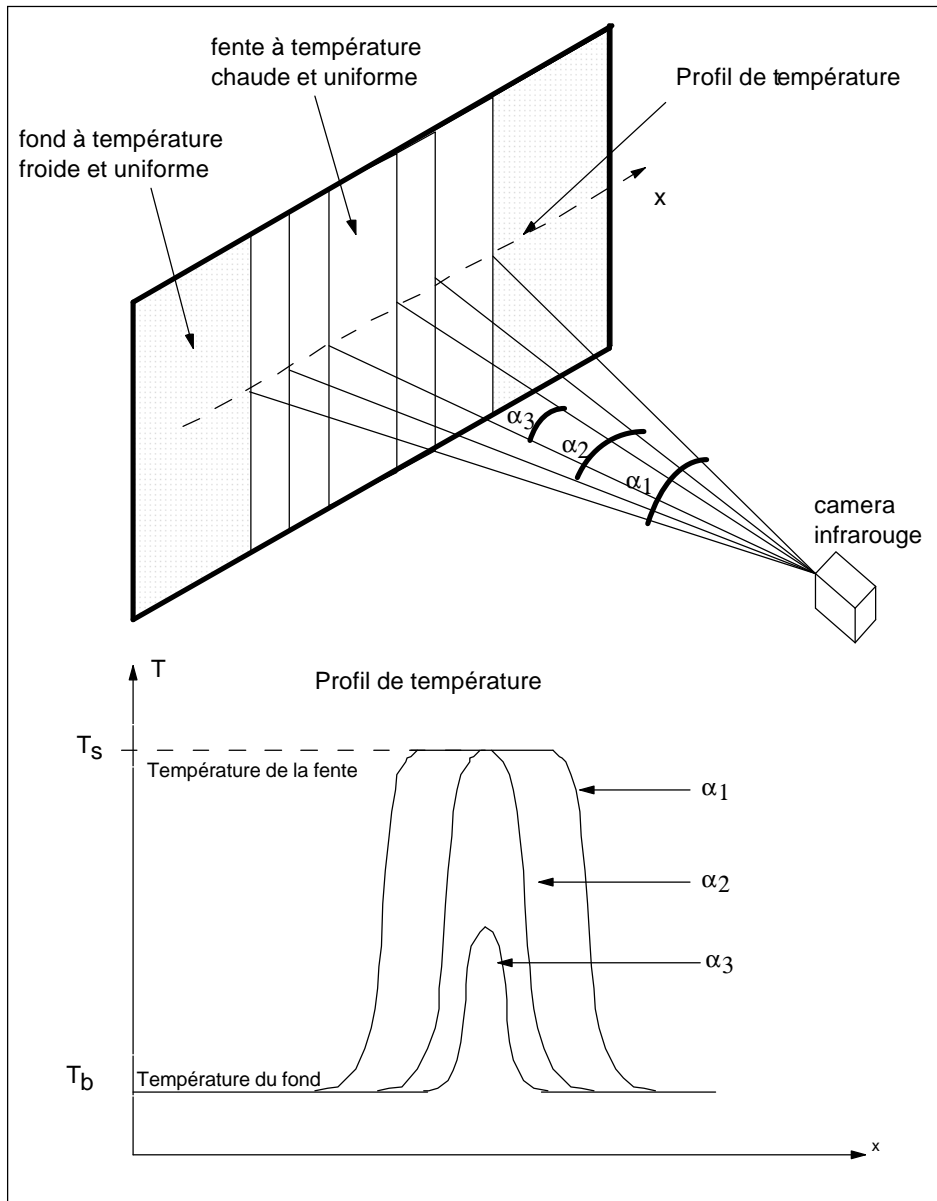


**Figure 4** : Présentation du banc d'essais

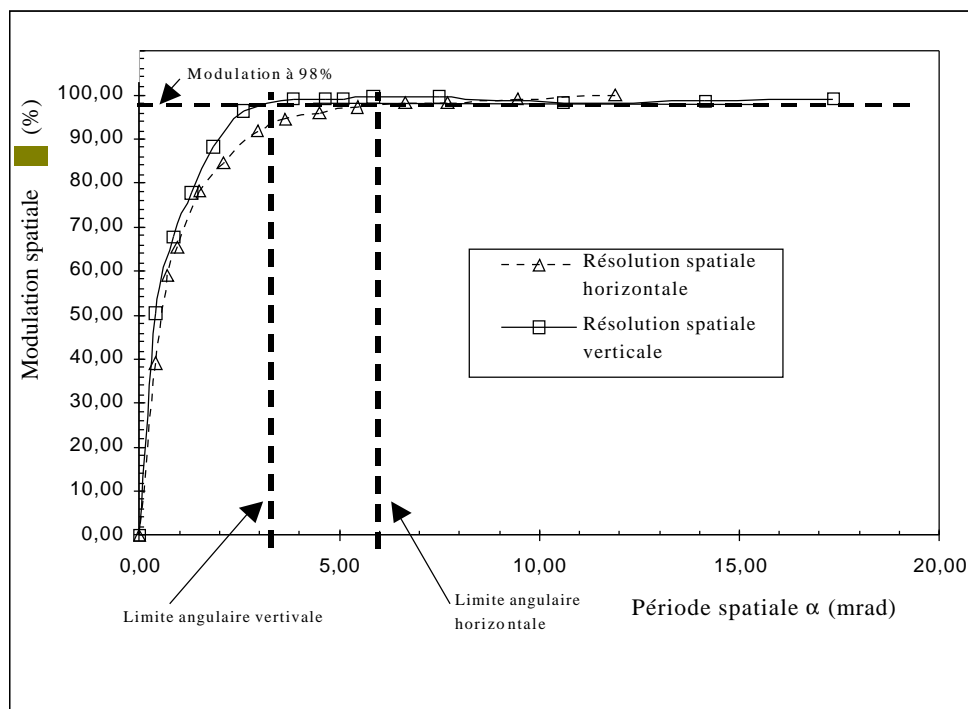




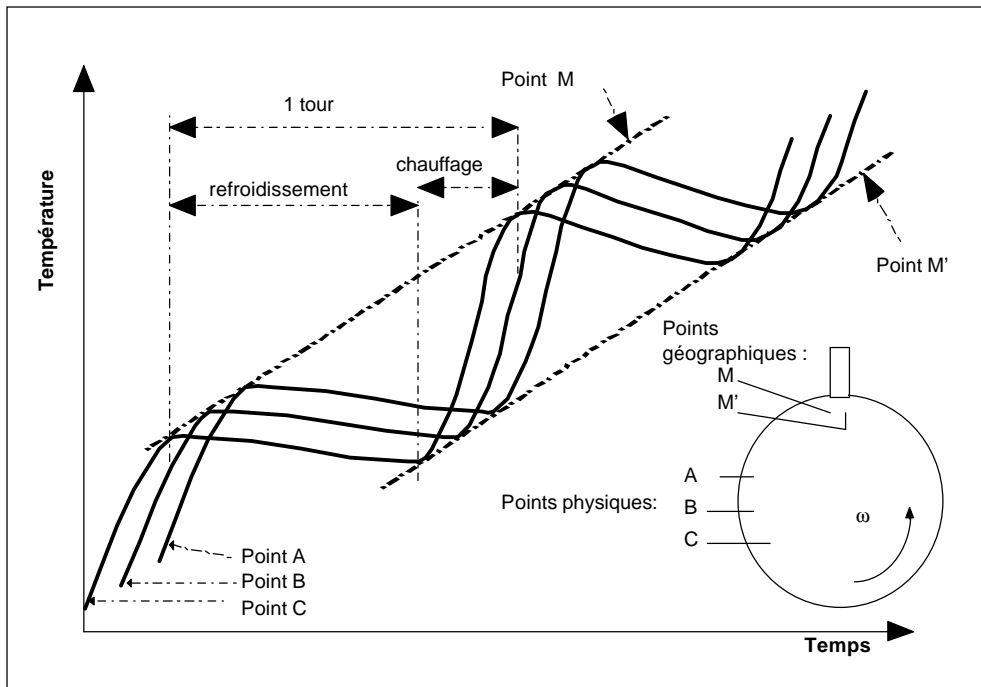
**Figure 5** : Caractérisation spatiale de la caméra



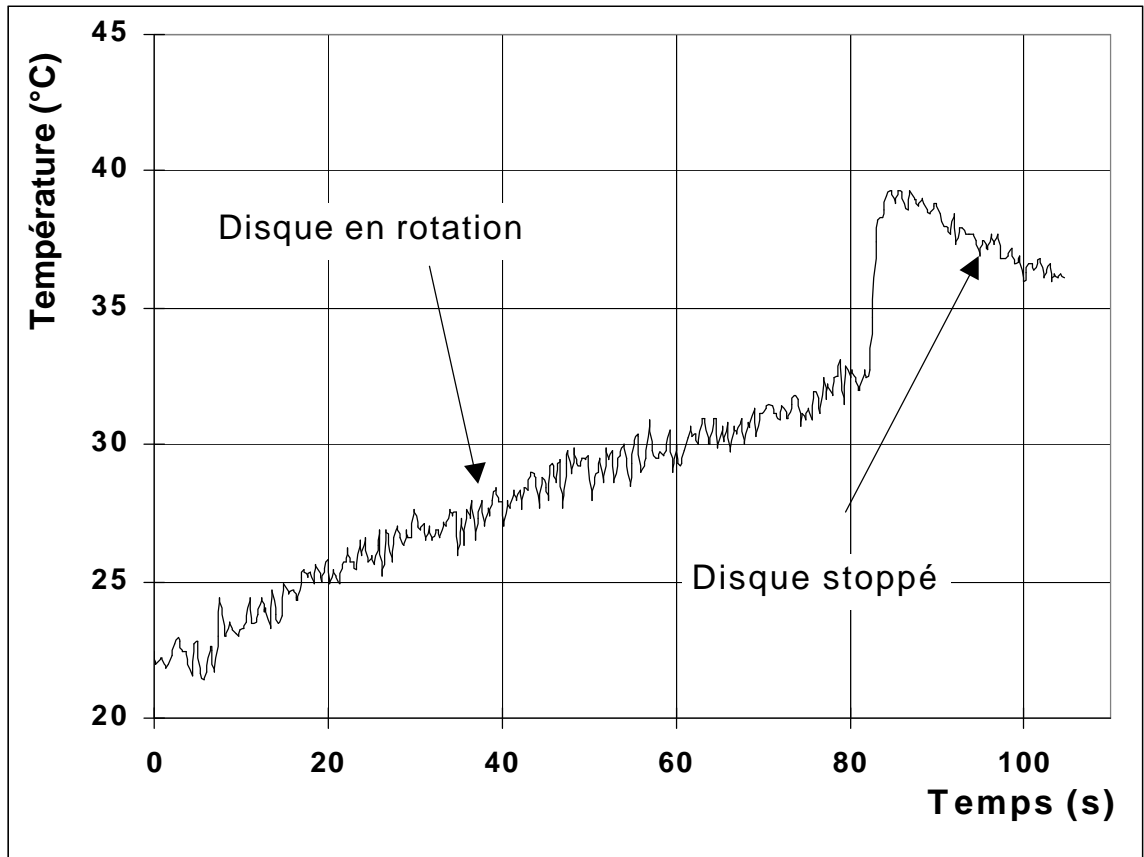
**Figure 6 : Résolution spatiale de la caméra utilisée**



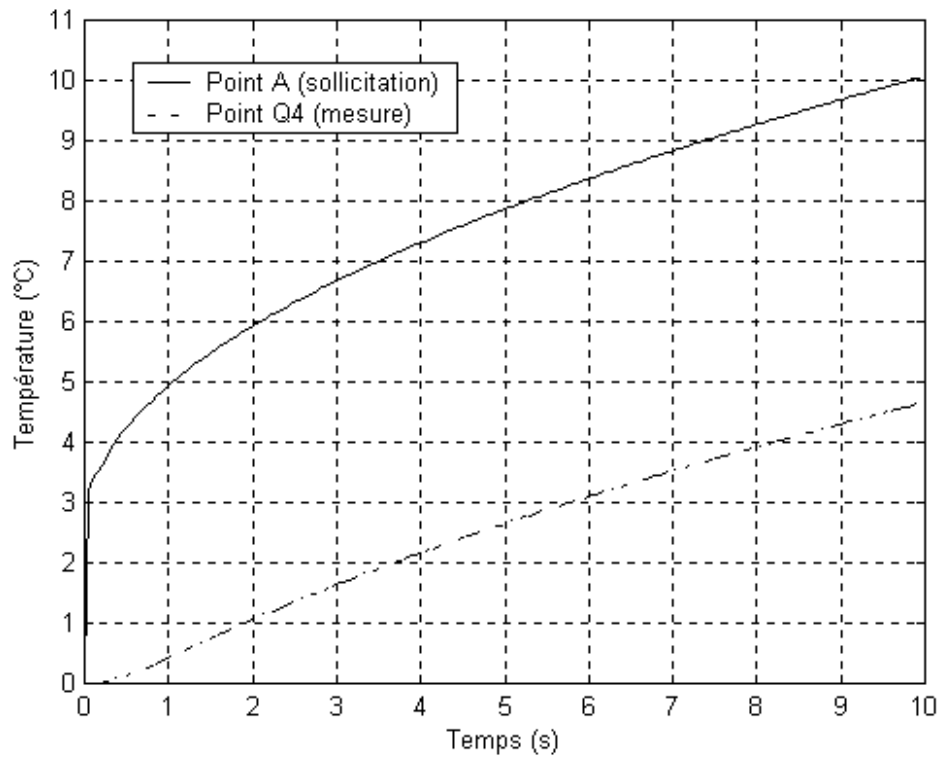
**Figure 7** : Représentation de l'influence de la rotation du disque sur l'évolution de température



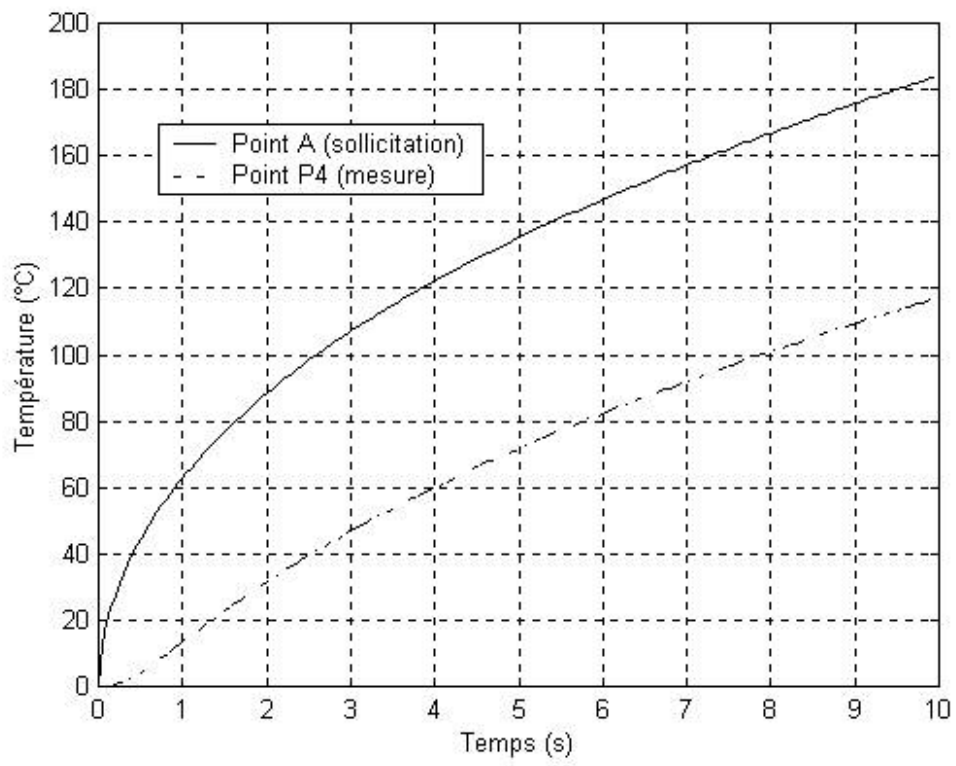
**Figure 8** : Influence de la rotation du disque sur la mesure par thermographie infra-rouge



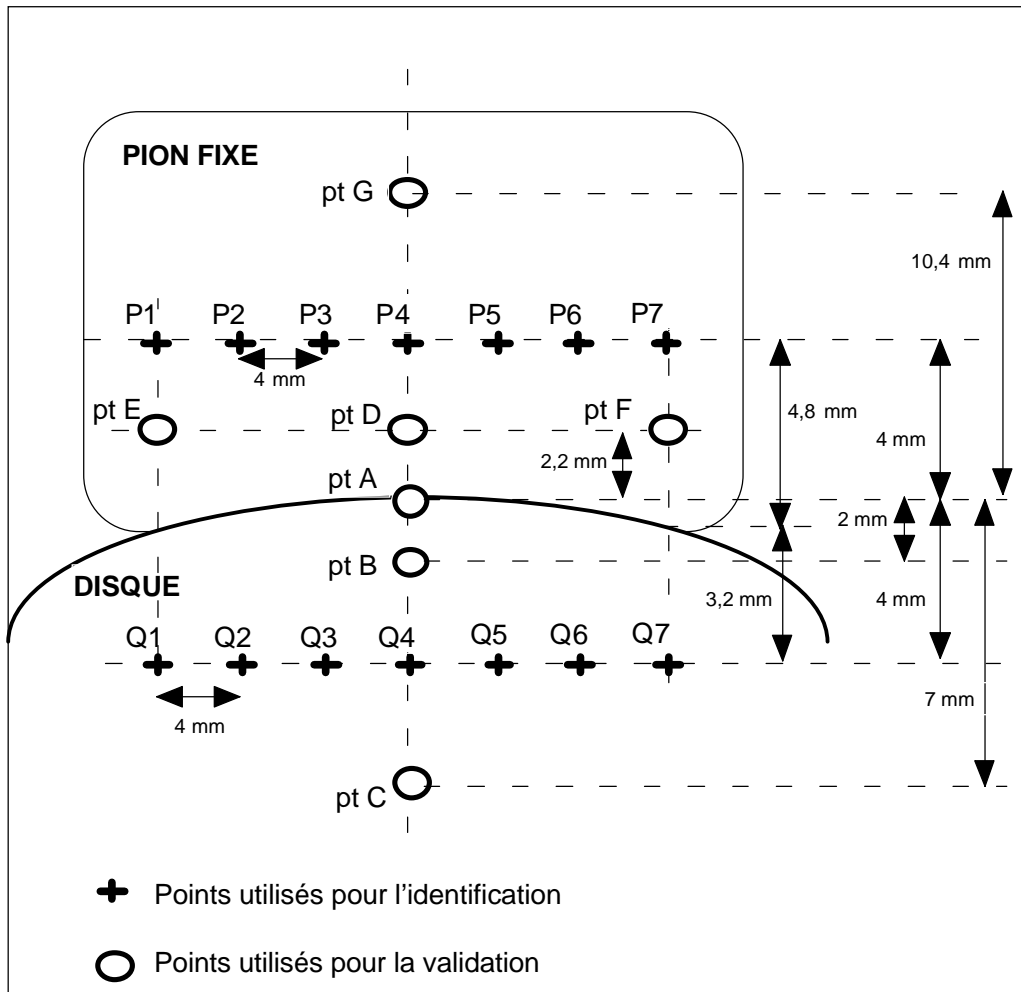
**Figure 9 a** : Evolution des températures en un point de mesure et en un point de sollicitation pour un flux constant égal à  $500 \text{ kW/m}^2$  reçu par le disque en rotation



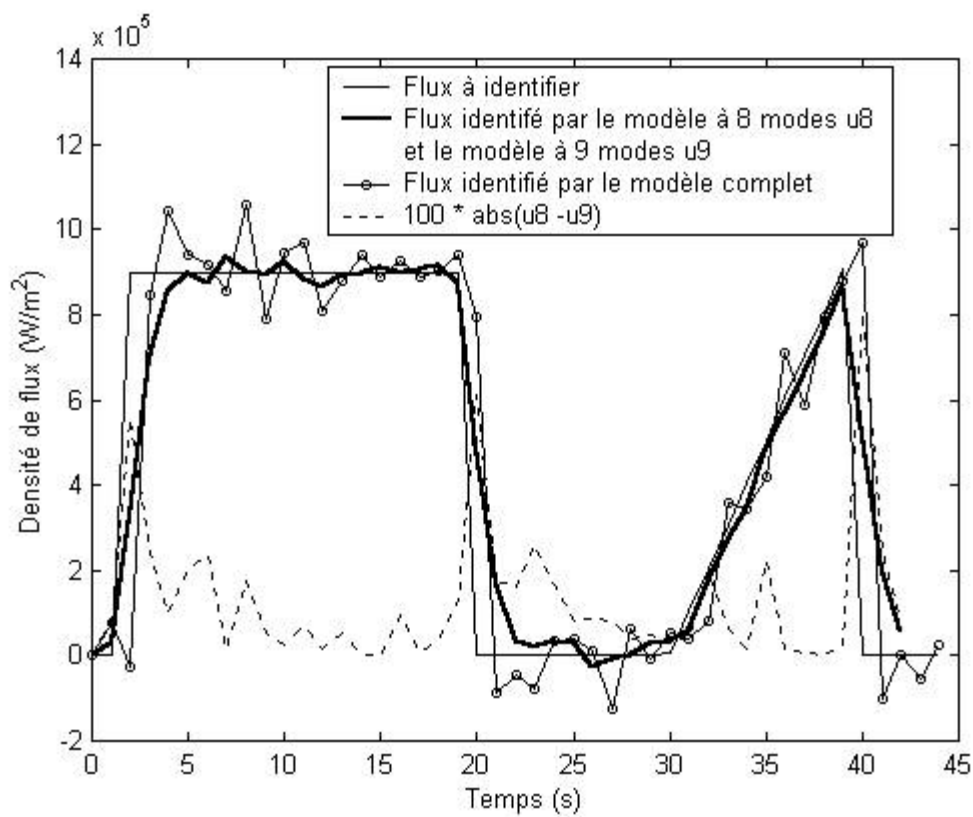
**Figure 9 a** : Evolution des températures en un point de mesure et en un point de sollicitation pour un flux constant égal à  $500 \text{ kW/m}^2$  reçu par le pion fixe



**Figure 10** : Position des points choisis pour l'identification du flux et la validation des résultats

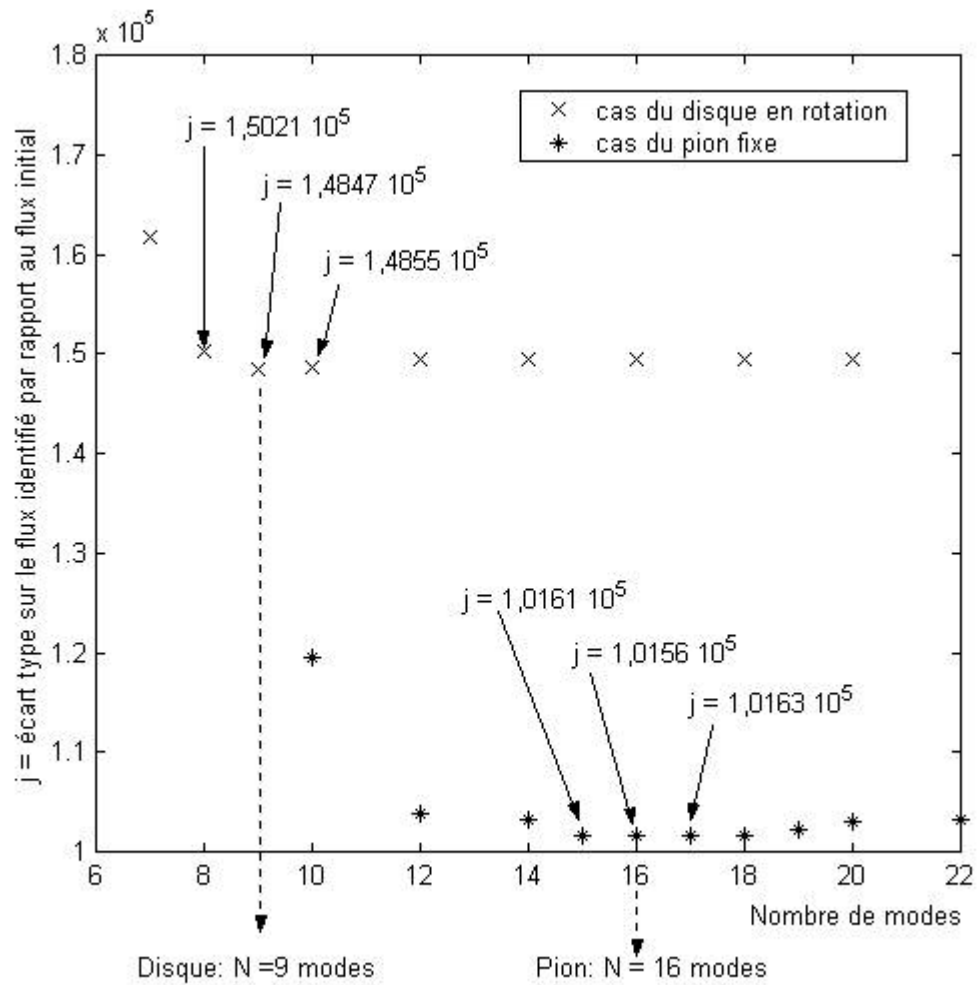


**Figure 11** : Influence du nombre de modes sur le processus d'identification du flux : Cas du disque

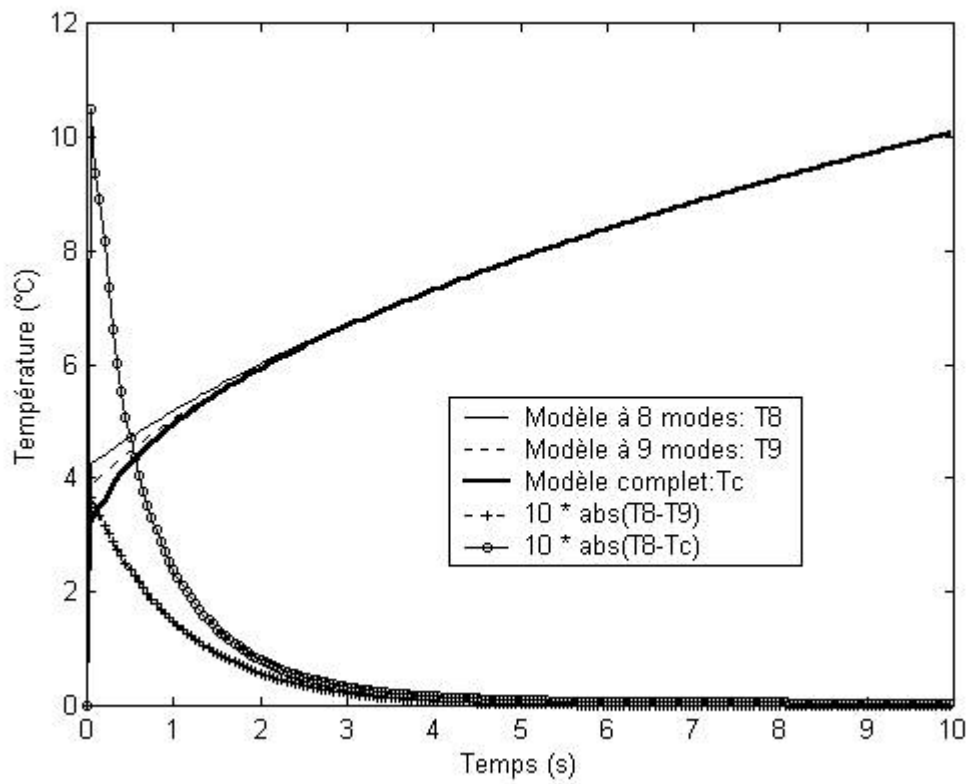




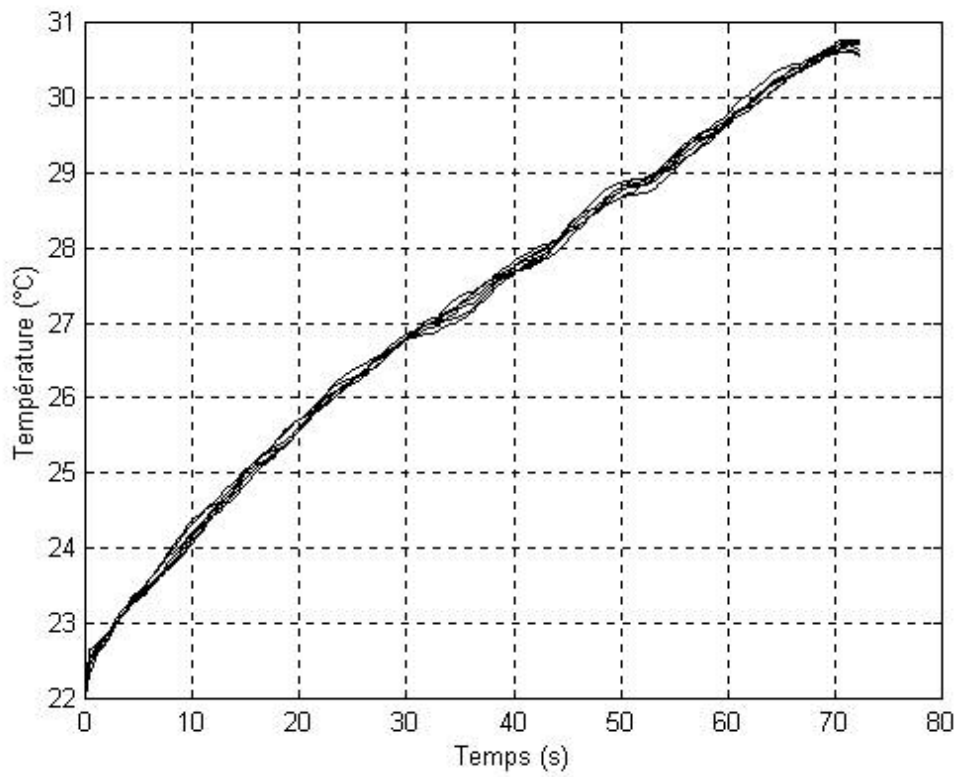
**Figure 12** : Evolution de l'écart du flux identifié, en fonction du nombre de modes gardés dans le modèle réduit



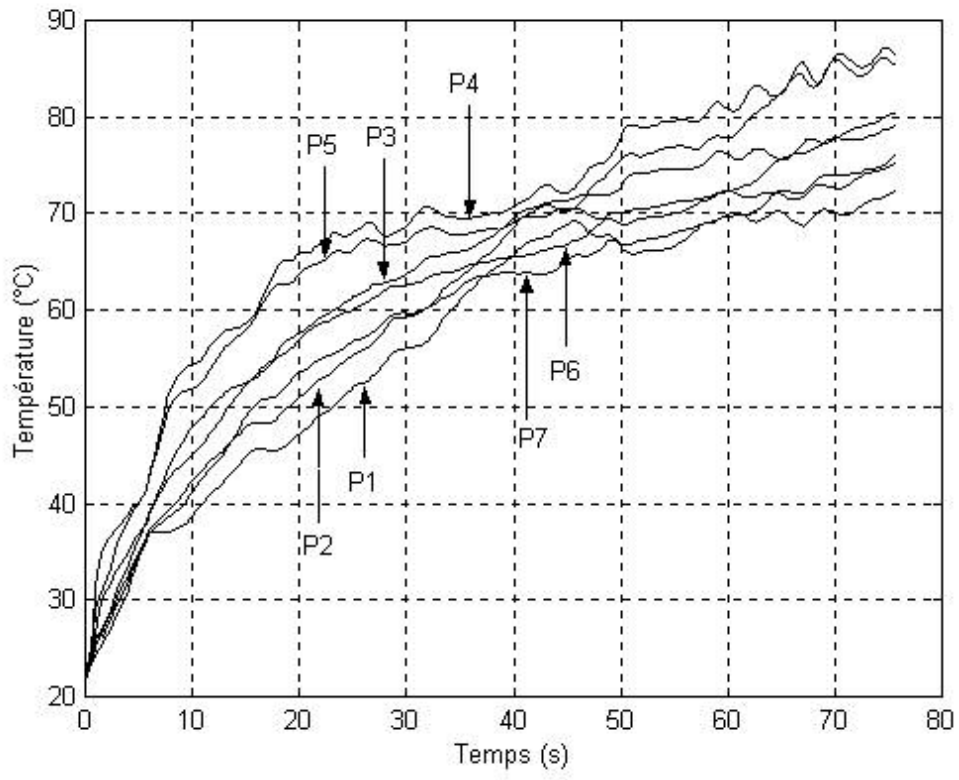
**Figure 13** : Influence du nombre de modes sur la précision du résultats : Cas du disque



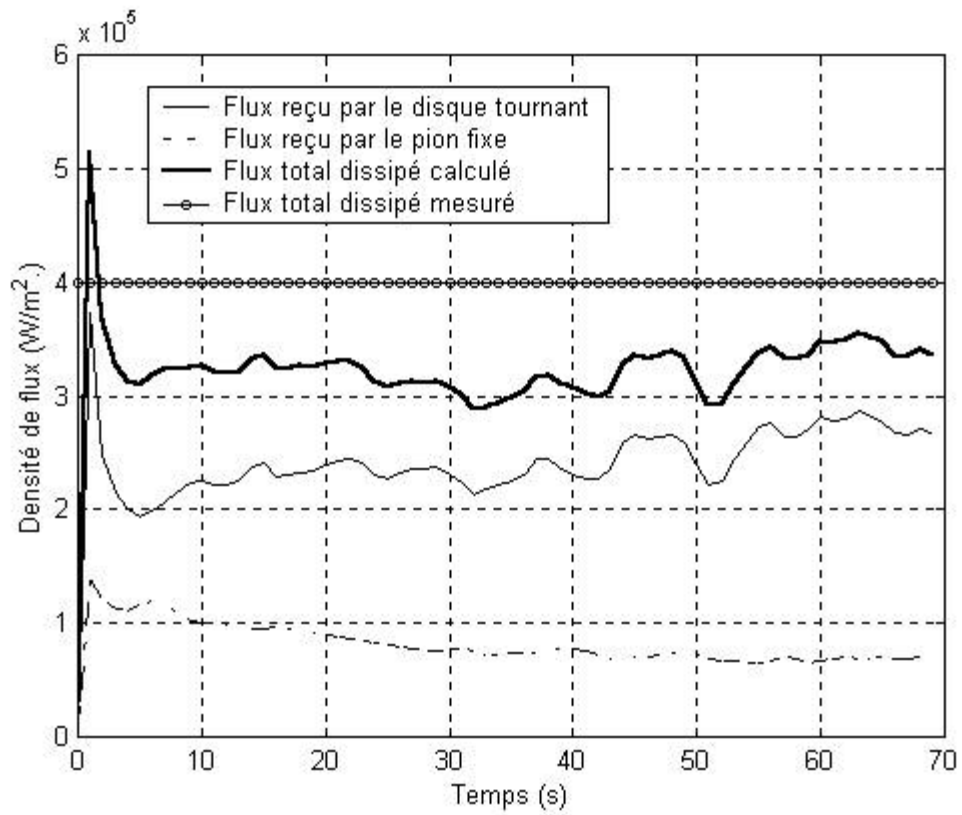
**Figure 14 a** : Evolution des températures mesurées filtrées dans le disque



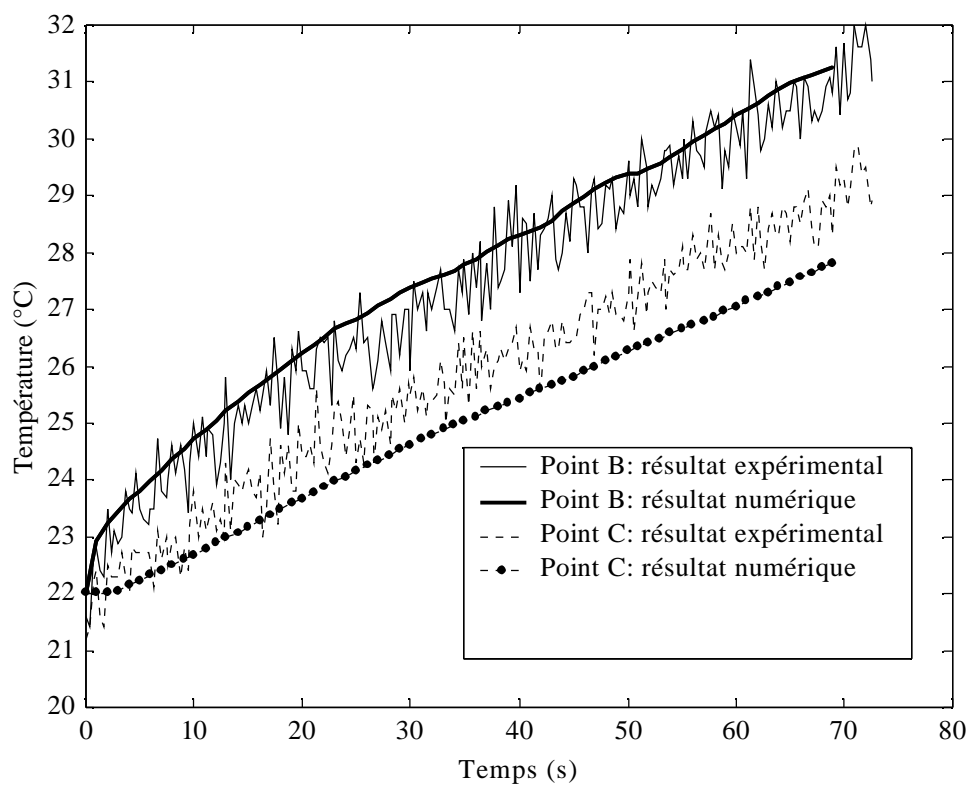
**Figure 14 b** : Evolution des températures mesurées filtrées dans le pion



**Figure 15** : Validation directe par comparaison du flux total mesuré et du flux total obtenu par sommation des deux flux identifiés



**Figure 16 a** : Validation indirecte par comparaison des températures dans le disque



**Figure 16 b** : Validation indirecte par comparaison des températures dans le pion

